

APLICACIÓN DE MÉTODOS VARIACIONALES EN LA MODELIZACIÓN DE TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES



ALBERTO HANANEL BAIGORRIA

APLICACIÓN DE MÉTODOS VARIACIONALES EN LA MODELIZACIÓN DE TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES



ALBERTO HANANEL BAIGORRIA

Editor Chefe

Ivanio Folmer

Bibliotecária

Eliane de Freitas Leite

Revisora Técnica

Gabriella Eldereti Machado

Diagramação e Projeto Gráfico

Gabriel Eldereti Machado

Imagem capa

www.canva.com

Revisão

Organizadores e Autores(as)

Conselho Editorial

Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva - UNIDAVI

Prof. Dr. Astor João Schönnell Júnior - IFFAR

Prof. Dr. Alan Ricardo Costa - UFRR

Profa. Dra. Andréia Bulaty -UNESPAR

Profa. Dra. Carla da Conceição de Lima - UFVJM

Prof. Dr. Camilo Darsie de Souza - UNISC

Profa. Dra. Clarice Caldeira Leite - UFRGS

Profa. Dra. Cecilia Decarli - UFRGS

Prof. Dr. Carlos Adriano Martins - UNICID

Prof. Dr. Christian Dennys Monteiro de Oliveira - UFCE

Profa. Dra. Dayse Marinho Martins - UFMA

Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos - UEL

Prof. Dr. Dioni Paulo Pastorio -UFRGS

Prof. Dr. Douglas Manoel Antonio de Abreu Pestana dos Santos - FASESP

Profa. Dra. Elane da Silva Barbosa - UERN

Profa. Dra. Elen Gomes Pereira - IFBA

Profa. Dra. Francielle Benini Agne Tybusch - UFN

Prof. Dr. Francisco Odécio Sales - IFCE

Prof. Dr. Francisco Ricardo Miranda Pinto - UFCAT

Prof. Dr. Gilvan Charles Cerqueira de Araújo - UCB

Prof. Dr. Ismar Inácio dos Santos Filho - UFAL

Prof. Dr. Leonardo Bigolin Jantsch -UFSM

Profa. Dra Liziany Müller Medeiros - UFSM

Profa. Dra Marcela Mary José - UFRB

Prof. Dr. Mateus Henrique Köhler - UFSM

Prof. Dr. Michel Canuto de Sena - UFMS

Profa. Dra. Mônica Aparecida Bortolotti - UNICENTRO

Prof. Nilton David Vilchez Galarza - UPLA

Prof. Dr. Olavo Barreto de Souza - UEPB

Prof. Dr. Rafael Nogueira Furtado - UFABC

Prof. Dr. Roberto Araújo da Silva Vasques Rabelo - UNILUS

Prof. Dr. Rodrigo Toledo - USCS

Prof. Dr. Sidnei Renato Silveira - UFSM

Prof. Dr. Thiago Ribeiro Rafagnin - UFOB

Prof. Dr Tomás Raúl Gómez Hernández - UCLV

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Hananel Baigorria, Alberto

Aplicación de métodos variacionales en la
modelización de trastornos temporomandibulares [livro
eletrônico] / Alberto Hananel Baigorria. -- Santa
Maria, RS : Arco Editores, 2024.

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-65-5417-231-8

1. Articulação temporomandibular - Distúrbios -
Tratamento 2. Odontologia I. Título.

24-192652

CDD-617.643

NLM-WU-400

Índices para catálogo sistemático:

1. Articulação temporomandibular : Disfunções : Odontologia 617.643

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415



10.48209/978-65-5417-231-8

Este livro é o resultado de uma pesquisa científica em atividades de ciência e tecnologia, intitulada *Aproximación de curvas y superficies mediante métodos variacionales con y sin malla. Aplicación a trastornos temporomandibulares*, realizada na Universidad de Granada.

Este trabalho foi submetido a uma revisão por pares externos duplamente cega (double-blind) antes da publicação.



CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS.....	7
ÍNDICE DE FIGURAS.....	8
RESUMEN.....	10
ABSTRACT.....	11
INTRODUCCIÓN.....	12
CAPÍTULO I.....	14
MÉTODOS VARIACIONALES.....	14
1.1. ¿Qué son los métodos variacionales?.....	15
1.2. Métodos variacionales con malla.....	16
1.3. Métodos de Galerkin y Ritz.....	17
1.4. Método de elementos finitos.....	18
1.5. Construcción de espacios de elementos finitos.....	19
1.6. Métodos variacionales sin malla.....	21
1.7. Funciones de base radial: tipos.....	21
1.8. Ecuaciones diferenciales.....	23
CAPÍTULO II.....	25
PROBLEMAS NO LINEALES Y FORMULACIÓN VARIACIONAL....	25
2.1. Problema no lineal: concepto.....	26
2.2. Problemas de contorno no lineales.....	28
2.2.1. Problema de Troesch.....	28
2.2.2. Problema de Bratu.....	30
2.3. Formulación variacional: aspectos generales.....	31
2.4. Problema de elasticidad.....	32
2.5. Ecuación en derivadas parciales.....	35
CAPÍTULO III.....	36
TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES Y ANÁLISIS FACTORIA.	36
3.1. Trastornos temporomandibulares: definición.....	37

3.2. Clasificación de los trastornos temporomandibulares.....	39
3.3. Examen clínico de los trastornos temporomandibulares.....	41
3.3.1. Índices nosológicos.....	41
3.4. Análisis factorial: concepto.....	43
3.5. Procedimiento del análisis factorial.....	44
CAPÍTULO IV.....	48
ANÁLISIS FACTORIAL DE LOS TTM Y MODELIZACIÓN BIOMECÁNICA Y VARIACIONAL DEL PROCESO DE OCLUSIÓN.....	48
4.1. Planteamiento del modelo de oclusión.....	49
4.2. Discretización en tiempo por el método de diferencias finitas.....	61
4.3. Discretización en espacio por el método de los elementos finitos.....	82
4.3.1. Cálculo de la solución discreta en espacio.....	85
4.3.2. Convergencia.....	86
CAPÍTULO V.....	91
PROGRAMACIÓN DEL PROBLEMA DE LOS TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES.....	91
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	117
SOBRE EL AUTOR.....	124

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Tabla de la estimación del error relativo entre la solución del problema del valor de frontera y su aproximación por una función B-spline de una partición de n intervalos iguales de $[0, 1]$	29
Tabla 2 Clasificación de trastornos temporomandibulares.....	40
Tabla 3 Informe del índice KMO y de la prueba de Barlett.....	49
Tabla 4 Método de extracción: análisis de componentes principales. Varianza total explicada.....	52
Tabla 5 Matriz de componentes rotados.....	53
Tabla 6 Variables obtenidas para cada uno de los factores extraídos.....	54
Tabla 7 Reindexación de los factores.....	55
Tabla 8 Variables obtenidas para cada factor reindexado.....	55
Tabla 9 Superficies mandibulares reconstruidas y su relación con los factores de TTM asociados; NR, cardinalidad en programa CAD utilizado (*: Primera molar).....	93
Tabla 10 Propiedades mecánicas de varios componentes de la ATM.....	96
Tabla 11 Direcciones de las componentes ortogonales musculares derivadas como vectores unitarios (cosenos directores) de fijación muscular.....	100
Tabla 12 Factores de escala y de peso asignados a los músculos masticatorios para 5 tareas de mordida.....	101
Tabla 13 Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo ICP.....	104
Tabla 14 Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo LGF.....	104
Tabla 15 Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo LGF+B.....	105
Tabla 16 Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo INC.....	105
Tabla 17 Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo RMOL.....	106

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Solución aproximada del problema de Bratu a partir de una partición uniforme del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ con 3×3 nodos. Error = 2.15242.....	31
Figura 2 Solución aproximada del problema de Bratu a partir de una partición uniforme del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ con 5×5 nodos. Error = 2.745783.....	31
Figura 3 Grafico de sedimentación para la selección de factores.....	51
Figura 4 Adquisición de tomografía y reconstrucción mandibular.....	92
Figura 5 Reconstrucción de superficies temporomandibulares de la Tabla 4...	94
Figura 6 <i>Mallado del modelo mandibular original compuesto por 40368 triángulos, 554752 tetraedros, 2352 aristas y 102821 vértices.....</i>	95
Figura 7 Mallado del modelo mandibular para simulación numérica compuesto por 2523 triángulos, 8668 tetraedros, 588 aristas y 2095 vértices.	96
Figura 8 Fronteras de la mandíbula diferenciadas de acuerdo con su numeración en FreeFem++.....	98
Figura 9 Grupos de vectores paralelos simulando músculos masticatorios unidos directamente al hueso.....	99
Figura 10 Vista lateral frontal de la mecánica de fuerzas producidas en oclusión.....	102
Figura 11 Vista lateral frontal izquierda mostrando condiciones de frontera impuestas en el modelo de TTM.....	103
Figura 12 Sujeciones en el modelo mandibular: regiones fijas y móviles...	107
Figura 13 Movimiento mandibular de un paciente con TTM: Desplazamiento con respecto al cóndilo izquierdo, caso estático (Superposición de mandíbulas).....	109
Figura 14 Análisis de desplazamientos.....	110
Figura 15 Zonas afectadas en la zona de las molares, cóndilos izquierdo y derecho.....	111
Figura 16 Ramas condilares afectadas.....	111
Figura 17 Ramas condilares afectadas con valores heterogéneos.....	112

Figura 18	Incisivos como variables no consideradas parte de TTM.....	112
Figura 19	Variación de la tensión en los cóndilos en distintos instantes de tiempo en un proceso de oclusión.....	113
Figura 20	Recomendación de estudio del problema de los TTM por métodos variacionales sin malla.....	115

RESUMEN

Los trastornos temporomandibulares son problemas que afectan a una gran cantidad de personas en el mundo, por lo cual se ha desarrollado, mediante investigaciones, diversos tratamientos para que los afectados puedan continuar con sus actividades sin problema alguno. En este trabajo se pretende hacer un aporte tomando en cuenta el análisis de los TTM. En ese sentido, se enfoca en construir un modelo matemático de oclusión usando ecuaciones en derivadas parciales, las cuales se desarrollan con métodos con malla (elementos finitos) y sin malla (nodos), a fin de que los profesionales de la salud puedan tener un mejor diagnóstico.

Palabras clave: trastornos temporomandibulares, método variacional, problemas no lineales, análisis factorial, modelización biomecánica

ABSTRACT

Temporomandibular disorders are problems that affect many people, which is why several treatments have been developed through research so that those affected can continue with their activities without any problem. This work is also intended to contribute to the analysis of TTM, so it focuses on building a mathematical model of occlusion using partial derivative equations, which are developed with methods with mesh (finite elements) and without mesh (nodes), so that health professionals can have a better diagnosis of the problem.

Keywords: temporomandibular disorders, variational method, nonlinear problems, factor analysis, biomechanical modeling

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas actuales del análisis numérico es el diseño de métodos de resolución numérica de los problemas de contorno no lineales. Esta investigación se realiza para brindar una resolución aproximada a este tipo de problema matemático, lo cual es efectuado por medio de discretizaciones en espacio contruidos por métodos con y sin malla. Otro de los problemas que también se ha detectado se relaciona con los trastornos temporomandibulares, ya que hasta hoy no existe información sobre su modelización matemática, motivo por el cual el estudio que se desarrolla es un trabajo pionero en estadística multivariante, que tiene la finalidad de manipular los grupos locales de trastornos y evitar un estudio global, pues es poco aconsejable su realización al tener que efectuar un análisis integrado como consecuencia de los numerosos estudios nosológicos realizados relacionado con índices odontológicos definidos por medio de ponderaciones.

Para efectuar un estudio matemático de los trastornos temporomandibulares se considera la construcción de un sistema informático que se basa en el diagnóstico de signos y síntomas para determinar las variables relevantes en los factores identificados. Sin embargo, debido a que los sujetos examinados y los examinadores son variables, los resultados pueden generar cierta incertidumbre, por lo cual es necesario recurrir a un sistema de inteligencia artificial. Este sistema es de gran utilidad porque facilita indicadores de pertenencia del avance de determinados factores de los TTM del paciente a prueba. Pese a esto, no posee un componente visual o gráfico, motivo por el cual se procede con la construcción de un prototipo de la mandíbula, con ayuda del CAD para lograr un mejor diagnóstico.

La elección de un programa de diseño debe ser lo más realista posible. Para esto, se añaden componentes, como fuerza, geometría y propiedades de los materiales. Se trata de un programa que incluye curvas *spline* de interpolación polinómica, así como ecuaciones diferenciales con el propósito de construir un equipo odontológico simple pero realista para obtener resultados clínicos aceptables de acuerdo con la modalización matemática.

CAPÍTULO I

MÉTODOS VARIACIONALES

Los métodos variacionales son uno de los más modernos utilizados para resolver las ecuaciones diferenciales parciales, además de ser considerado como un método que constituye la base teórica del método de los elementos finitos. Para aplicar los métodos variacionales se requiere cumplir con profundos requisitos matemáticos con el fin de obtener precisión. Algunos de los métodos variacionales que se utilizan son el método de Rayleigh-Ritz, Galerkin, de mínimos cuadrados y de colocación, los cuales son muy conocidos, debido a su constante uso y facilidad de uso, por ejemplo, en el método de mínimos cuadrados no se minimiza la norma euclidiana del error, sino que se minimiza la norma de suma; en otros términos, la suma de los valores absolutos de los errores.

Uno de los métodos que más destaca es el de los elementos finitos, el cual es un método numérico general para resolver ecuaciones diferenciales parciales de gran complejidad. Ha sido desarrollado para ser utilizado en computadoras y es de gran importancia porque permite resolver EDP sobre geometrías complicadas, de forma aproximada. Suele ser aplicado para diseñar y mejorar productos industriales, y para simular sistemas biológicos y físicos complejos. Cabe precisar que el método de elementos finitos es muy utilizado en el área de ingeniería para comprobar si un producto funcionará, desgastará y romperá como se espera.

Los métodos variacionales pueden ser con malla o sin malla. El primero sirve para discretizar el dominio de elementos finitos y para su uso se suele emplear programas especiales; adicionalmente, incluye diversos aspectos como funciones y aproximación de datos y la construcción de espacios de los elementos finitos. En el caso de los métodos variacionales sin malla se comprende a la función de base radial, que es una serie de técnicas en las que la superficie debe pasar por cada valor de muestra medido. Así también, desarrollan sus tipos como *spline* de placa fina, las funciones de base radial con soporte compacto, la función multicuadrática inversa y demás.

1.1. ¿Qué son los métodos variacionales?

Los métodos variacionales son técnicas desarrolladas para resolver ecuaciones diferenciales y encontrar puntos críticos de una funcional relacionada con tal ecuación (Sirqueira-Carvalho & De Oliveira, 2023). Mediante estos métodos se reduce el problema para integrar en una ecuación diferencial a su equivalente variacional. Este tipo de métodos se dividen en dos: directos e indirectos.

Método variacional directo

- Método de Rayleigh-Ritz: es utilizado para minimizar el funcional en correspondencia a un número finito de funciones admisibles. Es un método variacional que emplea una combinación lineal de funciones de expansión con coeficientes indeterminados con la finalidad de alcanzar la solución aproximada de un determinado problema. Para esto, se utiliza un funcional, que es extremizado y se diferencia en cada uno de los coeficientes. Las funciones de expansión son usadas con el fin de satisfacer las condiciones preestablecidas de frontera (Franquet, 2020).

Método variacional indirecto

- Método de colocación: es un procedimiento aplicado para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno. Consiste en aplicar residuos ponderados a puntos determinados del dominio, donde el valor de la ecuación diferencial se aproxima a los valores que se obtuvieron a partir de una función polinomial (Guillen *et al.*, 2016).

- Método de emparejamiento de puntos: la función de ponderación elegida es Delta de Dirac. La selección de punto de colocación o emparejamiento es realizada en el intervalo tantas veces como coeficientes desconocidos haya.

- Método de subdominio: las funciones de ponderación son elegidas de forma que solamente existan únicamente sobre subdomonios. Las funciones clásicas utilizadas son tres: base uniforme, base lineal y base sinusoidal.

- Método Galerkin: se eligen las funciones base como funciones de ponderación. Este método fue reducido al método de Raileigh-Ritz.

- Método de mínimos cuadrados: consiste en minimizar la integral del cuadrado de los residuos. Es un método que envuelve derivativas de orden superior que suelen ser mejor que Galerkin o Rayleigh-Ritz; sin embargo, tiene como desventaja requerir funciones de ponderación de mayor orden que suelen tener un nivel más alto de complejidad.

1.2. Métodos variacionales con malla

Los métodos variacionales con malla incluyen la descripción y el desarrollo de los métodos variacionales, resolución numérica, funciones y aproximación de datos por medio de la aplicación de los elementos finitos. En este aspecto, se realiza una descripción de los métodos de discretización de Galerkin y Ritz, que son necesarios para la resolución de un determinado problema variacional; asimismo, se realiza la descripción de los aspectos básicos para construir espacios de elementos finitos.

1.3. Métodos de Galerkin y Ritz

Este es uno de los métodos más utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales con elementos finitos. Consiste en aprovechar las propiedades geométricas que surgen durante la aproximación de vector con el fin de usarlas para resolver las ecuaciones (Langtangen & Mardal, 2016). Se caracteriza por los siguientes aspectos.

- Debe cumplir con las condiciones de contorno
- Debe ser derivable
- Las condiciones de contornos deben ser homogéneas
- Deben ser linealmente dependientes
- Deben definir un conjunto completo

Es un método para aproximar la solución del problema, para lo cual se definen problemas similares en subespacios finitos dimensionales del espacio V . Para ser específico, el problema se relaciona con cualquier subespacio finito dimensional $V_h \in V$. Cabe precisar que el problema tiene solamente una solución u_h , la cual se denomina solución discreta.

En el método de Ritz, la solución discreta se caracteriza por la propiedad (Hananel-Baigorria, 2015):

$$J(u_h) = \inf_{v_h \in V_h} J(v_h)$$

Donde el funcional J está dado por $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$. Esta alternativa de solución se conoce como el método de Ritz. Este método consiste en plantear una función prueba, la cual debe cumplir con las condiciones geométricas del problema propuesto, dicho de otro modo, que cumpla los requisitos de frontera o borde del problema. Sirve para calcular los autovalores y los autovectores del sistema hamiltoniano.

1.4. Método de elementos finitos

Los elementos finitos se caracterizan por estar conectados entre sí por puntos, los cuales son denominados puntos nodales o nodos y, al conjunto que forma, se le denomina malla (Mirlisenna, 2016). La precisión de los elementos finitos depende de la cantidad de elementos y nodos, y el número de elementos que constituyen una malla, para lo cual suele utilizarse programa de simulación computacional a fin de mejorar el análisis.

De acuerdo con Tobón-Cadavid *et al.*, (2018), el método de los elementos finitos (MEF) se utiliza para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales sobre dominios que se encuentran sometidos a las fuerzas del cuerpo. Este método fue desarrollado en 1943 por Richard Courant para minimizar las variables de cálculo y obtener soluciones aproximadas. En 1956 fue modificado por Turnet, Clough, Martin y Topp para establecer una definición más amplia del análisis numérico. De manera general, se caracteriza por ser similar a los métodos de Galerkin y Ritz, se divide en subdominio (elementos finitos), se integra elemento a elemento y cada elemento adopta funciones de interpolación sencillas.

Este método permite obtener una solución numérica aproximada sobre un dominio, estructura o cuerpo —sobre el que se definen determinadas ecuaciones diferenciales de forma integral o débil—, el cual es dividido en un número elevado de subdominios denominados elementos finitos. Una de las propiedades más importantes de este método es la convergencia, ya que en caso de que se consideren particiones de elementos finitos finas de manera sucesiva, la solución numérica que se calcula converge hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

Para aplicar el método de elementos finitos se siguen los siguientes pasos: formulación fuerte, que está representada por la condición inicial y las condiciones de frontera. La formulación variacional o débil, que transforma la ecuación diferencial parcial en una ecuación integral dentro del espacio de

Hilbert. Cabe precisar que en el segundo paso se obtiene un problema que se aproxima a un espacio de dimensión finita, esto es, de elementos finitos. La formulación realizada (Galerkin) plantea unas funciones base con el propósito de hallar la solución numérica por medio de la resolución de un sistema lineal. Es importante precisar que las dificultades son mayores en aquellos coeficientes que varían en diversas escalas y poseen un contraste alto, lo cual se debe a que si el coeficiente de difusión varía en una escala ϵ , la resolución de las mallas de los elementos finitos tiene que poseer un tamaño mucho menor que ϵ (Hernández, 2018).

El método de los elementos finitos es muy utilizado por su facilidad y generalidad para introducir dominios de cálculos complejos. Este método se adapta con mayor facilidad a problemas de transmisión de calor, campo electromagnético, mecánicas de fluidos con el fin de calcular los campos de presiones y velocidad; es decir, el MEF es un método útil para predecir de qué forma un producto va a reaccionar ante la vibración, las fuerza, el calor, el flujo de fluidos entre otros efectos físicos.

1.5. Construcción de espacios de elementos finitos

Para la construcción de espacios de elementos finitos, se debe considerar una serie de aspectos básicos, como el establecimiento de una triangulación sobre el conjunto, el cual debe ser subdividido en un número finitos de subconjuntos (elementos finitos) para satisfacer las siguientes propiedades (Hananel, 2015):

1. $(T_h 1) \underline{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$
2. $(T_h 2)$ para cada $K \in T_h$, el interior $\text{Int}(K)$ es no vacío y el conjunto K es cerrado.
3. $(T_h 3)$ para cada $K_1, K_2 \in T_h$ diferentes se tiene $\text{Int}(K_1) \cap \text{Int}(K_2) = \emptyset$
4. $(T_h 4)$ para cada $K \in T_h$, la frontera ∂K es lipschitziana.
5. $(T_h 5)$ cualquier cara de cualquier d -simple K_1 en la triangulación es una cara de otros d -simple K_2 o un subconjunto de la frontera Γ .

Después de que la triangulación se ha establecido sobre el conjunto, se procede a definir el espacio de elementos finitos X_h mediante un determinado procesado. Debe considerarse que X_h es un espacio de funciones finitos dimensionales que ha sido definido sobre el conjunto

Dado la existencia de un espacio de elementos finitos X_h se procede a definir los espacios

$$P_K = \{v_h|_K; v_h \in X_h\}$$

Los cuales han sido generados por las restricciones v_h de las funciones v_h X_h a los elementos finitos $K \in T_h$.

Por otro lado, también se han establecido requisitos para establecer elementos finitos: si se considera $\underline{\Omega} = \sum_{K \in T_h} K$ (MEF 1) un espacio de elemento finito X_h relacionado con una triangulación T_h de $\underline{\Omega}$ con $P_k = \{v_h|_K; v_h \in X_h\}$ tiene que cumplir los requisitos que se detallan a continuación:

- Para cada $K \in T_h$, el espacio P_K debe consistir de funciones, las cuales son casi polinomio o polinomio (MEF 2).
- Se debe cumplir $X_h \subset C^0(\underline{\Omega})$ o $X_h \subset C^1(\underline{\Omega})$.
- Debe verificarse la existencia de una base canónica que X_h cuyas funciones sean de fácil descripción o posean soportes pequeños (MEF 3).

Respecto a los elementos finitos para problemas de orden 2, considerando que $\mathbb{R}^d$ con su base canónica $(e_i)_{i=1}^d$, el espacio de todos los polinomios de igual o menor grado que k en las variables $\{x_1, \dots, x_d\}$ para cada entero $k \geq 0$

$$p : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \gamma_\alpha x^\alpha$$

Cuya dimensión está dada por:

$$\dim(P_K) = \binom{d+k}{k}$$

SI es un espacio de funciones sobre $\mathbb{R}^d$ y A es cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^d$, que es denotado por $\Phi(A)$ al espacio de las funciones que se ha formado a

partir de las restricciones del conjunto A . Por ello, se considera:

$$P_K(A) = \{p|_A : p \in P_K\}$$

Para cualquier conjunto A de interior no vacío se puede observar que la dimensión del espacio $P_K(A)$ es la misma que la del espacio $P_K = P_K(\mathbb{R}^d)$.

1.6. Métodos variacionales sin malla

En los métodos variacionales sin malla se realiza una descripción y el desarrollo del concepto de función de base radial y los tipos que abarca, como las funciones multicuadrática, la función radial positiva y la función gaussiana y demás.

1.7. Funciones de base radial: tipos

Las funciones de base radial (FBR) son un conjunto de técnicas de interpolación exacta; en otros términos, la superficie pasa por cada valor de muestra medido. La función de base radial es una función por medio de la cual se calcula la distancia euclídea de un vector de entrada en función a un centro, lo cual resulta en la siguiente función: $f(x) = (\|x - c_i\|)$. (Portalo *et al.*, 2018). Para comprender las funciones de base radial, también deben comprenderse los términos que engloba, entre los cuales destacan los siguientes:

- Radial definida positiva: cuando a $\mathbb{R}^d$ le corresponde la función $\phi: (\|x\|), x \in \mathbb{R}^d$
- Función completamente monótona: una función que es $\phi: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sobre $(0, +\infty)$ si $\phi \in C^\infty(0, +\infty)$ y $(-1)^l \phi^{(l)}(r) \geq 0, l \in \mathbb{N}_0, r > 0$.
- Función gaussiana: $\phi(r) = e^{-\alpha r}, \alpha > 0$ es monótona en $(0, +\infty)$
- Función multicuadrática inversa: $\phi(r) = (c^2 + r)^{-\beta}, c > 0, \beta > 0$ es monótona en $[0, +\infty)$

- Teorema de Hausdor -Bernstein-Widder: una función es monótona en $(0, +\infty)$ si existe solamente una medida μ , no nula, finita y no negativa.
- Teorema de Schoenberg: ϕ es monótona en $[0, +\infty)$ si $\phi: (\|Q\|^2)$ se define positiva en cualquier R^d .
- Teorema de Micchelli: $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Si $\phi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es k veces monótona sobre $(0, +\infty)$ y no es constante.

Las funciones de base radial abarcan una serie de tipos, los cuales se detallan a continuación (Gaviria-Posada & Hernández-Marulanda, 2021):

- Spline de placa fina o de superficie: es una técnica que se base en splines para el suavizado y la interpolación de datos. Se utiliza la siguiente función si se toma $k = 1$:

$$g(Q) = \sum_{i=1}^n c_i \|Q - Q_i\|^2 \log + \|Q - Q_i\| + p(Q), p \in P_1(R^d)$$

- Función multicuádrica: Se utiliza la siguiente función:

$$g(Q) = \sum_{i=1}^n c_i \sqrt{c^2 + \|Q - Q_i\|^2} + d, d \in \mathbb{R}$$

- Funciones de base radial con soporte compacto: son obtenidas a partir de las potencias truncadas mediante la integración para construir las funciones de soporte.
- Función multicuadrática inversa: se utiliza la fórmula:

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

Una de las funciones de base radial que más destaca es la de soporte compacto son obtenidas a partir de las potencias truncadas mediante la integración. Debido a esto, es posible construir funciones $\phi_{d,k}: [0, \alpha) \rightarrow [0, 1]$, tales que

- $\phi_{d,k}$ se define positiva en $\mathbb{R}^2$
- En $[0, 1]$ la función $\phi_{d,k}$ es un polinomio de grado $[d/2] + 3k + 1$
- $\phi_{d,k} \in C^{2k} [0, \infty)$

Para la interpolación de usa la función $\phi_{d,k}(r/\delta)$ en el que el parámetro $\delta > 0$ tiene la función de determinar el tamaño del soporte.

Se presentan expresiones $\phi_{d,k}$ con $k = 0, 1, 2$ con la notación $l = [d/2] + k + 1$, las cuales son

$$\begin{aligned}\Phi_{d,0}(r) &= (1-r)_+^{[d/2]+1}, \\ \Phi_{d,1}(r) &= (1-r)_+^{\ell+1}[(\ell+1)r+1], \\ \Phi_{d,2}(r) &= (1-r)_+^{\ell+2}[(\ell^2+4\ell+3)r^2+(3\ell+6)r+3].\end{aligned}$$

Si se considera $d = 2$, se adquieren funciones definidas positivas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\Phi_{3,0}(r) &= (1-r)_+^2, \quad \Phi_{3,1}(r) = (1-r)_+^4(4r+1), \\ \Phi_{3,2}(r) &= (1-r)_+^6(35r^2+18r+3).\end{aligned}$$

1.8. Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es aquella que contiene las derivadas de una o más variables dependientes en correspondencia a variables independientes. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en tres clases: según el tipo, según el orden y según la linealidad (Lázaro, 2015).

- Según el tipo: Se divide en ordinaria y parcial, donde la primera contiene derivadas en función a una variable independiente y la segunda, respecto a dos o más variables independientes.
- Según el orden: se dividen en cuatro tipos. Las ecuaciones de primer orden, segundo orden, tercer orden y orden N .
- Según la linealidad: dividen en dos tipos lineal y no lineal. La ecuación lineal cumple los siguientes aspectos: su variable dependiente y sus derivadas de primer grado; en otros términos, la potencia de todo término donde la variable dependiente aparecer es la unidad. La ecuación no lineal no cumple los dos requisitos anteriores.

En general, las ecuaciones diferenciales tienen por solución a una función y se caracterizan por tener usualmente una cantidad infinita de solución, las cuales se denominan solución general. Hay situaciones en que se desea hallar una solución particular que satisfaga condiciones iniciales, las cuales especifican los valores no solo de una función, sino también de sus derivadas en un valor concreto de la variable. Por otro lado, las ecuaciones diferenciales son utilizadas porque ayudan a hacer predicciones considerando las condiciones iniciales y futuras de las variables.

CAPÍTULO II

PROBLEMAS NO LINEALES Y FORMULACIÓN VARIACIONAL

En matemática, existen diversos tipos de problemas que son sometidos a muchas resoluciones para obtener una solución. Cada uno de los problemas son resueltos mediante un procedimiento que puede ser largo o corto, lo cual suele ser realizado con la combinación de ideas y esfuerzo con el propósito de hallar el mejor resultado posible. Las matemáticas tienen un alto nivel de importancia no solo en su área, sino también en otras áreas como la medicina, porque es la fuente principal para obtener modelos avanzados, además de permitir optimizar el manejo de datos, la algoritmización, los métodos de visualización, entre otros. Uno de los problemas que suelen ser utilizados son los no lineales, que se caracterizan por no ser de primer grado, a diferencia de las ecuaciones lineales que tienen una o varias incógnitas, cada una con la posibilidad de llevar un coeficiente.

Las ecuaciones no lineales suelen ser utilizadas en el campo de la ciencia y sus soluciones pueden ser infinitas; además, requieren métodos numéricos o aproximaciones para su resolución, debido a que no existen métodos algebraicos para resolverlas. Pese a que suelen ser de resolución complicada, han demostrado ser de gran utilidad en la mayoría de los casos porque tienen cierta precisión y rango para valores de entrada. Algunos de los problemas no lineales más conocidos son los de Troesch y Bratu.

Otro de los problemas que se presentan en matemáticas son las ecuaciones diferenciales, que relacionan una función con sus derivadas. Este tipo

de ecuaciones abarca la formulación débil, que es una alternativa para que las ecuaciones puedan ser escritas en forma integral y se dé lugar a ecuaciones tratables aplicando métodos de álgebra lineal. Una formulación débil se caracteriza por demandar menos requerimientos y para su desarrollo se aplican métodos como el de Rayleigh-Ritz o de residuos ponderados. Por último, se encuentra el problema de elasticidad, que es un problema matemático utilizado para encontrar las tensiones y los desplazamientos en un sólido deformable elástico.

2.1. Problema no lineal: concepto

De acuerdo con Quezada (2016), los problemas no lineales pertenecen al sistema no lineal, el cual es definido como uno de los sistemas más complejos en comparación con el sistema lineal, donde pueden realizarse procedimientos sistemáticos para hallar vectores y valores propios de una matriz. Así también, un sistema no lineal es entendido como un sistema en que el cambio de salida y entrada no son proporcionales. Suele ser aplicado en matemáticas, ingeniería, biología, física y otros campos científicos. Los sistemas no lineales suelen describir cambios en las variables y pueden caracterizarse por ser contrario a la intuición, impredecibles y caóticos, a diferencia de los sistemas lineales, que son mucho más simples.

Usualmente, en matemática, el comportamiento de un sistema no lineal suele ser descrito por medio de un sistema de ecuaciones no lineales, que es entendido como un conjunto de ecuaciones simultáneas donde las incógnitas (las ecuaciones diferenciales son funciones desconocidas) suelen aparecer como variables en el argumento de una función no polinomial de grado uno o en un polinomio de grado mayor que uno. Es decir, en un sistema de ecuaciones no lineales, las ecuaciones que quieren resolverse no pueden ser escritas como una combinación lineal de las variables o funciones desconocidas que aparecen en ellas. Los sistemas pueden ser definidos como no lineales, independientemente si aparecen o no funciones lineales conocidas.

Debido a que las ecuaciones no lineales son de resolución complicada, los sistemas no lineales suelen tener cierta proximidad por medio de ecuaciones lineales (linealización). Es un método que suele ser útil en la mayoría de los casos, además de tener cierto rango y precisión para los valores de entrada; no obstante, hay fenómenos que pueden estar ocultos por la linealización a partir de los cuales se determina que un sistema no lineal puede ser contradictorio, impredecible o incluso caótico.

Ahora, los problemas no lineales suelen involucrar ecuaciones diferenciales no lineales, que son diversos y cuyos métodos de solución o análisis dependen del problema, por ejemplo, destacan las ecuaciones Navier-Stokes y Lotka-Volterra. Una de las mayores dificultades que suelen presentarse en la resolución de problemas no lineales es no poder combinar soluciones conocidas en nuevas soluciones. Para ejemplificar, en los problemas lineales, es posible usar una familia de soluciones linealmente independientes para la construcción de soluciones generales mediante la aplicación del principio de superposición, lo cual facilita la resolución del problema. En cambio, en los problemas no lineales, se pueden encontrar diversas soluciones que son muy específicas para las ecuaciones no lineales; no obstante, no pueden construirse nuevas soluciones por la falta del principio de superposición.

Para complementar, Cuevas-Palma (2019) indica que la complejidad de un sistema no lineal es mayor al sistema lineal. La diferencia entre ambos sistemas se debe a ciertas características, por ejemplo, el no lineal no puede ser dividido en diferentes partes para solucionar el problema o no puede recombinarse soluciones anteriores para hallar una nueva al problema actual. Por este motivo, es imposible emplear métodos como el teorema de superposición (para conocer el efecto de tener una o más fuentes en un circuito lineal), el análisis de Fourier (permite que una función periódica sea representada como la suma infinita de cosenos y senos) y Laplace (se usa para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales y coeficientes constantes).

La mayoría de los sistemas que abundan en matemáticas son no lineales, no suelen comportarse de forma predecible y son muy diferentes a los sistemas lineales. Para identificar un sistema no lineal se recomienda observar si en el problema una de las potencias de x_1 del lado derecho de una ecuación son diferentes a 1 (uno), para ejemplificar x^3 , x^2 o $\cos(x)$, $\sin(x)$ (Cuevas Palma, 2019).

2.2. Problemas de contorno no lineales

Un problema de contorno en el campo de las ecuaciones diferenciales es definido como el conjunto de una ecuación diferencial y las condiciones de frontera o contorno que deben satisfacerse. Sirve para establecer condiciones de validez de las ecuaciones diferenciales que explican los problemas matemáticos. Incluye las ecuaciones no lineales que son cualquier función o ecuación que no es lineal, por ejemplo, las funciones exponenciales, las funciones cuadráticas, entre otras. En los siguientes acápites se presentan los problemas matemáticos que más destacan, que son los problemas de Troesch y Bratu, los cuales, al ser problemas de ecuaciones no lineales, se presentan como una alternativa de solución debido a su complejidad para resolverlos.

2.2.1. Problema de Troesch

De acuerdo con Hananel (2015), el problema de Troesch puede ser solucionado de la siguiente manera:

Se construye una sucesión de funciones spline σ_n con $n \in \mathbb{N}$ para $p = 1$ y $f(x, u(x)) = \lambda \sinh(\lambda u(x))$ con $x \in [0,1]$ y $\lambda = 1$, partiendo de una base de *B-splines* que se ha construido sobre una partición uniforme de intervalo $[0,1]$ con $n + 1$ nodos.

Sea σ la solución del problema en cuestión y σ_2 el spline aproximante para $n = 2$. En la Tabla 1 se presenta la estimación del error por mínimos cuadrados (que ha sido designado por E_m), entre el valor de frontera y su aproximación por una función spline que parte de una base de *B-splines* que ha sido

construida sobre una partición uniforme de $n+1$ nodos de intervalo $[0, 1]$ para $n = 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65$. La ecuación de E_m es la siguiente:

$$E_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{1000} (\sigma(a_i) - \sigma_n(a_i))^2}{1000}}$$

Donde: a_i , para $i = 1, \dots, 1000$ son puntos aleatorios de $[0, 1]$.

Tabla 1: *Tabla de la estimación del error relativo entre la solución del problema del valor de frontera y su aproximación por una función B-spline de una partición de n intervalos iguales de $[0, 1]$*

Nodos: n	E_m
2	6.39449×10^{-2}
3	7.05895×10^{-3}
5	8.01515×10^{-4}
9	9.10052×10^{-5}
17	1.03386×10^{-5}
33	1.17531×10^{-6}
65	1.33558×10^{-7}

Nota. Hananel-Baigorria (2015)

La forma presentada es uno de los métodos que pueden aplicarse para resolver el problema del Troesch; sin embargo, no es el único que existe. También destaca el método de colocado, que es un procedimiento de resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de contorno, el cual consiste en aplicar residuos ponderados a determinados puntos del dominio para aproximar el valor de la ecuación diferentes a valores que se obtienen de una función polinomial (Guillén *et al.*, 2016).

2.2.2. Problema de Bratu

El problema de Bratu es una ecuación diferencial elíptica no lineal que suele aparecer en modelos de ignición. La ecuación puede tener varias soluciones o ninguna, lo cual depende de los valores del coeficiente; debido a esto, para resolver completamente el problema es necesario calcular las soluciones dependientes del parámetro. La resolución suele ser abordada por medio de la discretización con diferencias finitas del operador diferencial, que se combina con un método de continuación, el cual es fundamental para introducir una coordenada curvilínea, que se define por medio de una ecuación escalar (Pérez, 2020). De acuerdo con Hananel (2015), el problema de Bratu puede ser solucionado de la siguiente manera:

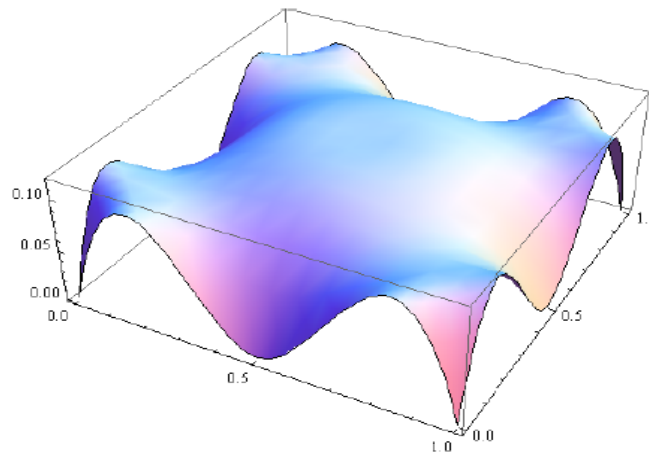
Se construye una sucesión de funciones spline con $n \times m$ para $p = 2$ y $f(x, u(x)) =$ con $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ y , partiendo de una base de B -splines bidimensionales que ha sido construida sobre una una partición uniforme del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ con $n \times m$ nodos.

Para constatar la aproximación , en vista que no se conoce la solución específica del problema, se procede a calcular un error de aproximación por medio de la siguiente ecuación:

$$Error = \sqrt{\frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} (\Delta u(\mathbf{a}_i) + \lambda e^{u(\mathbf{a}_i)})^2},$$

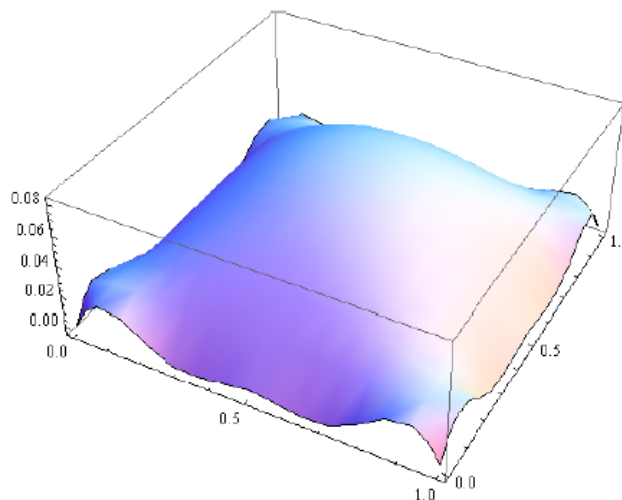
Donde es un conjunto de puntos aleatorios del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$. En las Figuras 1 y 2, se observa que el error suele ser 0 cuando $n \rightarrow +\infty$ y $m \rightarrow +\infty$.

Figura 1 : Solución aproximada del problema de Bratu a partir de una partición uniforme del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ con 3×3 nodos. Error = 2.15242



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Figura 2: Solución aproximada del problema de Bratu a partir de una partición uniforme del dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ con 5×5 nodos. Error = 2.745783



Nota. Tomado de Hananel (2015)

2.3. Formulación variacional: aspectos generales

La formulación variacional, también conocida como formulación débil, es una forma alternativa donde las EDP son escritas de manera integral y dan lugar a ecuaciones tratables por medio de la aplicación de diferentes métodos

sobre espacios funcionales o vectoriales. Una de las ventajas de la formulación variacionales es que una EDP de segundo orden solo utiliza las primeras derivadas (Rodríguez, 2018).

La formulación débil es una manipulación matemática desarrollada con el objetivo de relajar los requisitos fuertes para lograr resolver una ecuación en derivadas parciales. Es preciso destacar que la forma variacional no quiere decir que la solución sea débil o el resultado que se obtenga se desvíe de los resultados reales, sino que una forma débil significa la reducción de los requisitos de continuidad de las funciones de base empleadas para la aproximación, lo cual favorece la resolución del problema al permitir utilizar polinomios de menor grado.

Para llegar a ello, se convierte la ecuación diferencial en una forma integral que suele ser más sencilla de resolver. La formulación variacional es uno de los métodos que explican la técnica de incrementar la cantidad de elementos para lograr una mayor precisión en la simulación, además de ser ampliamente usado para contribuir a la resolución de los problemas. A diferencia de la formulación débil, la formulación fuerte necesita que la solución sea diferenciable y continua, por lo menos, hasta la segunda derivada. Así también, en esta forma no se incorporan las condiciones de contorno, pues es una tarea complicada para resolver los problemas de formas fuertes. La denominación “forma fuerte” se debe a que los requisitos sobre la continuidad de las variables de campo son más estrictos, por lo que, para abordarlos, surge la forma débil.

2.4. Problema de elasticidad

Un problema elástico es un problema matemático utilizado para encontrar las tensiones y los desplazamientos en un sólido deformable elástico. Este tipo de ecuación se caracteriza en que tanto la deformación, la ecuación constitutiva y los desplazamientos están dados por ecuaciones lineales. En este tipo

de caso, el problema puede ser reducido a un problema mixto de Dirichlet-Von sobre un dominio del espacio. Cabe precisar que la desventaja principal de los problemas de elasticidad es que no todos los sistemas de ecuaciones diferenciales aceptan construir una función cuya minimización aproxime a una solución exacta.

Para el problema de elasticidad se han desarrollado diversas ecuaciones y teoremas, de los cuales se describen los más resaltantes (Del Caño, s.f.):

Ecuación de Navier

Tiene como fin evitar la complicación relacionada con el manejo de magnitudes de diferentes tipos (desplazamientos, tensiones, deformaciones), para lo cual se formula una serie de ecuaciones que solamente contengan a los desplazamientos y cuya solución sea la del problema elástico. La elección de los desplazamientos como variables del problema obedece a que una vez que se conocen, la obtención de los campos de tensiones y deformaciones va a necesitar operaciones algebraicas simples y ordinarias.

Ecuaciones de Beltrami y Michell

Hay situaciones en que puede obtenerse la solución de tensiones sin que se llegue a obtener desplazamiento. Si se presenta esta posibilidad se obtiene la ventaja porque ello implica un orden menos de integración comparándolo con la obtención de desplazamientos. Para esto, se debe imponer el cumplimiento de las ecuaciones de integrabilidad.

Teorema de unicidad de solución del problema de elasticidad lineal

En elasticidad, suele emplearse un método de resolución de tipo inverso; es decir, ensayar una solución y verificar *a posteriori* que esta cumpla con las ecuaciones del modelo matemático, lo cual podría carecer de fundamento si no se garantiza que la solución del problema es única. Lo mismo sucede con el teorema de unicidad, el cual debe cumplir con ciertas condiciones para su correcto planteamiento.

Hananel-Baigorria (2015) plantea lo siguiente: sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ conexo, acotado, abierto con frontera continua lipschitziana. Se define el siguiente espacio:

$$V = U = \{v = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1(\Omega))^3 : v_i = 0 \text{ sobre } \Gamma_0, i = 1, \dots, 3\}$$

Donde Γ_0 es un subconjunto medible de Γ , con una medida positiva. El espacio V se equipa con la siguiente norma:

$$\|v\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Además, para cualquiera de $v \in (H^1(\Omega))^3$ se establece

$$\epsilon_{ij}(v) = \epsilon_{ji}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3,$$

Así también,

$$\sigma_{ij}(v) = \sigma_{ji}(v) = \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk}(v) \right) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}(v), i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3,$$

Donde μ y λ son constantes positivas. A partir de esto, se definen dos formas: bilineal con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) \right\} dx, \end{aligned}$$

Así como la forma lineal con la siguiente ecuación:

$$F(v) = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma} g \cdot v d\gamma = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 f_i v_i dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^3 g_i v_i d\gamma,$$

En caso de que se asuman pequeñas tensiones y desplazamientos, el sistema describirá el estado de un cuerpo, que ocupará el conjunto Ω por la ausencia de fuerzas; u es el desplazamiento de los puntos de Ω . En el espacio V , las

formas presentadas son continuas. Ahora, se deduce que

$$v = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow |v| = \left(\sum_{i,j=1}^3 |\epsilon_{ij}(v)|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

Es una norma y la medida de Γ_0 es estrictamente positiva. A partir de $\lambda > 0$ y $\mu > 0$ y usando la ecuación bilineal se colige que $a(v,v) \geq 2\mu|v|^2$, por ello, se deduce la coercividad sobre V y se concluye la existencia de una sola función $u \in V$, mediante el cual se minimiza el siguiente funcional:

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda (\operatorname{div} v)^2 + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 (\epsilon_{ij}(v))^2 \right\} dx - \left(\int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v d\gamma \right)$$

Sobre el espacio V y se establece su equivalente

$$\forall v \in V, \quad \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij}(u) \epsilon_{ij}(v) dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot v d\gamma.$$

2.5. Ecuación en derivadas parciales

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) son aquellas que involucran derivadas parciales de una función desconocida y tiene dos a más variables independientes. Estas ecuaciones son funcionales y se expresan de la siguiente manera (Casas, 2021):

$$F(x, u, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u, \dots, \partial_{x_1}^2 u, \dots, \partial_{x_n}^k u) = 0$$

Donde u , es la incógnita, y depende de la variable $x \in \mathbb{R}^n$ y sus derivadas parciales de orden $\leq k$. Cabe precisar que k es el orden de la EDP.

Las EDP se clasifican en varios tipos: elípticas, parabólicas e hiperbólicas, las cuales pueden resolverse al plantear diferentes esquemas numéricos donde las derivadas parciales se reemplazan por estar próximas a diferencias finitas divididas; por ejemplo, en las ecuaciones elípticas se usa la ecuación de Laplace.

CAPÍTULO III

TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES Y ANÁLISIS FACTORIAL

Los trastornos temporomandibulares (TTM) son un grupo de afecciones de la cavidad bucal que ocasionan dolor y disfunciones en la articulación mandibular y en los músculos que la rodean. Debido a la gran cantidad de trastornos identificados hasta hoy en día, estos han sido clasificados de acuerdo con la zona afectada, como son los trastornos de las articulaciones y de los músculos. Si bien es un problema que se trata con tratamiento quirúrgico y no quirúrgico, durante su presencia genera muchas molestias en los pacientes, por ejemplo, dolor al masticar, rigidez mandibular, zumbidos en los oídos, chasquidos, dolor en el cuello o el rostro, entre otros.

El desarrollo de los trastornos temporomandibulares se debe a causas multifactoriales, sin embargo, en la mayoría de los casos, la causa no está clara. Esto se debe a que, en algunos pacientes, los síntomas aparecen sin razón aparente y en otros puede deberse a factores genéticos o psicológicos. Como resultado, se han realizado estudios para determinar la etiología de los TTM y clasificarlos; de manera conjunta, se realizan exámenes más detallados con el propósito de obtener información pormenorizada sobre los signos y síntomas del paciente para determinar el tratamiento más adecuado y aliviar los cuadros clínicos causados por una alteración en la articulación temporomandibular.

Para analizar los TTM se recurre a las ciencias matemáticas porque es un área que permite explorar estas afecciones de una manera más específica. Para esto, se recurre al análisis factorial, que es una técnica estadística mediante la

cual se explora las dimensiones subyacentes, variables o constructos del objeto de estudio del investigador. En este caso, el análisis factorial se realiza para analizar el problema de los trastornos temporomandibulares y determinar las variables que se relacionan con esta, así como el tipo de correlación que poseen, considerando previamente una serie de test para identificar la viabilidad del análisis factorial en este tipo de estudio y garantizar un estudio verídico.

3.1. Trastornos temporomandibulares: definición

Los trastornos temporomandibulares (TTM) son un grupo de afecciones que provocan dolor y disfunción en la articulación mandibular y en los músculos que permiten el movimiento de la boca. Los trastornos temporomandibulares se definen como afecciones de origen multifactorial que suelen aparecer en mayor frecuencia en personas de edad avanzada o que hayan sido diagnosticadas con enfermedades reumáticas. Se asientan en la articular temporomandibular y también se relaciona con estructuras periarticulares. Se caracterizan por afectar la musculatura periarticular y causar dolor de tipo inflamatorio, por lo que afecta la calidad de vida y la capacidad funcional del sujeto afectado (Manzano *et al.*, 2023).

Los trastornos temporomandibulares son un grupo heterogéneo de enfermedades generadas, en la mayoría de los casos, por causas multifactoriales y provocan dolor en las estructuras dental y orofacial, las cuales se diferencian por la extensión del daño a nivel articular y muscular. Los factores que ocasionan los trastornos temporomandibulares pueden ser de tres tipos: sociales, psicológicos y fisiológicos. En los factores sociales se encuentran la familia, el ambiente laboral, la escuela y el nivel socioeconómico; en los factores psicológicos están la depresión, la ansiedad y el estrés; en los factores fisiológicos destacan la sobrecarga funcional, las enfermedades degenerativas, las parafunciones, las discrepancias maxilomandibulares y el trauma (Nuño *et al.*, 2019).

Por último, los trastornos temporomandibulares son entendidos como una condición musculoesquelética dolorosa que afecta la articulación temporomandibular, los músculos de la masticación y otras estructuras anatómicas del sistema estomatognático. Su origen es multifactorial y complejo. Se manifiesta mediante el dolor, el cual es una de las razones principales de consulta de los pacientes; así también, los TTM se caracterizan por limitar la apertura de la mandíbula y generar ruidos articulares, los cuales se relacionan con la pérdida de la estabilidad oclusal, que se refleja en modificaciones fisiológicas y morfológicas del sistema estomatognático (Moreno *et al.*, 2021).

De acuerdo con el Instituto Nacional de Investigación Dental y Craneofacial (2022) y Wurgaft-Dreiman *et al.* (2023), los síntomas que una persona con TTM padece son los siguientes:

- Dolor en o en la articulación mandibular o los músculos de la masticación
- Dolor y rigidez en el cuello o la cara
- Rigidez mandibular
- Asimetría facial
- Bloqueo de la mandíbula o movimiento limitado por desviación mandibular
- Chasquido, chirrido o tronido doloroso en la articulación mandibular al abrir o cerrar la boca
- Pérdida de la audición, dolor de oído o mareos
- Cambio en el encaje de los dientes inferiores o superiores

El Instituto Nacional de Investigación Dental y Craneofacial (2022) indica que el tratamiento puede ser quirúrgico y no quirúrgico:

Tratamiento quirúrgico

- Medicamentos: el odontólogo puede recomendar medicamentos como AINE, antidepresivos, opioides, anticonvulsivos, entre otros. Estos me-

dicamentos deben ser recetados con mucho cuidado porque pueden provocar adicción.

- Proloterapia: consiste en inyectar una solución que irrita el área de la articulación temporomandibular para reparar la articulación.
- Cirugía: se realiza un corte junto a la oreja para acceder a la articulación temporomandibular. Cabe precisar que la cirugía ocasiona cambios permanentes en la articulación.

Tratamiento no quirúrgico

- Fisioterapia: tiene por objetivo mejorar, mantener o recuperar la función física o el movimiento. Se puede aplicar la terapia manual que consiste en utilizar las manos para estirar los músculos y los tejidos blandos de la articulación. Este tipo de terapia ayuda a aliviar el dolor.
- Enfoques de autocuidado y salud de la conducta: son las actividades que el paciente realiza por sí mismo, cómo aprender técnicas de relajación y meditación; aprender todo sobre los TTM y establecer metas para atender su afección.

Estos son algunos de los métodos que se usan para tratar los TTM, para lo cual el odontólogo requiere hacer un estudio previo de la afección con el propósito de aplicar el tratamiento que más se adecúe al paciente.

3.2. Clasificación de los trastornos temporomandibulares

De acuerdo con la Academia Estadounidense de Dolor Orofacial (AAOP), los trastornos temporomandibulares se dividen en dos grupos: trastornos musculares y trastornos articulares, el que, a su vez, se divide en cinco tipos: trastornos articular dolorosos, articulares, enfermedades articulares, congénitos o del desarrollo, y fracturas, tal como se presenta en la tabla 1 (Ortiz & Quito, 2022):

Tabla 2: Clasificación de trastornos temporomandibulares

Tipos de TTM	Subtipos de TTM	Ejemplos
Trastornos musculares		• Mialgia • Dolor miofascial • Miositis • Mioespasmo • Hiperquinesia • Hipoquinesia • Hipertrofia • Contractura
	Trastornos articular dolorosos	• Artralgia • Artritis
Trastornos articulares	Articulares	• Alteraciones del complejo cóndilo-disco: desplazamiento discal • Desórdenes de hipomovilidad: adhesiones y anquilosis • Desórdenes de hipermovilidad: subluxación y luxación
	Enfermedades articulares	• Enfermedades degenerativas: osteoartritis y osteoartrosis • Condilosis • Osteonecrosis • Osteocondritis disecante • Artritis sistémica: Artritis reumatoide • Neoplasmas • Condromatosis sinovia
	Congénitos o del desarrollo	• Aplasias • Hipoplasia • Hiperplasia • Neoplasia • Agenesia
	Fracturas	

Nota. Ortiz & Quito (2022)

La clasificación de los trastornos temporomandibulares es importante como herramienta de investigación para estudiar el dolor, además, sirve como un guía de diagnóstico y tratamiento clínico, lo cual es fundamental para manejar y aplicar el tratamiento correspondiente dependiendo del tipo de afección que el paciente presente, así como para disminuir el dolor, detener la progresión de la alteración, garantizar la recuperación funcional y la reanudación de las actividades diarias normales.

3.3. Examen clínico de los trastornos temporomandibulares

Para realizar el examen clínico de los trastornos temporomandibulares se utilizan índices, con el fin de diagnosticar de manera precisa el problema que posee la persona. Uno de los índices más utilizados y el de mayor aceptación es el índice de Helkimo, que posteriormente fue modificado para obtener mejores resultados en la distribución de severidad. Durante el examen clínico se analizan los signos y síntomas que presenta la persona, como la limitación de la apertura mandibular, la pérdida de dientes, ruidos articulares, dolor, entre otros, con el propósito de determinar el tipo de trastorno y determinar el tratamiento que se le deberá aplicar al paciente para su recuperación (Alvarado-Menacho, 2019).

3.3.1. Índices nosológicos

La nosología es la rama de la medicina encargada de describir y clasificar las enfermedades, según la normativa que se basa en la identificación y la caracterización de los componentes básicos de cada entidad nosológica (Tizón, 2018). Los índices nosológicos han sido elaborados con el propósito de determinar la ausencia o la presencia de algún tipo de trastorno temporomandibular. La mayoría de los índices nosológicos elaborados son buenas alternativas porque siguen un proceso correcto y ordenado dentro del diagnóstico de los TTM. Pese a esto, cuando se determina el tratamiento y el pronóstico del paciente, no

se establece una diferencia en el tipo de tratamiento. Como consecuencia, se han estado realizando estudios para presentar propuestas y reducir los ítems o criterios utilizados, con el fin de reflejar a los trastornos temporomandibulares como una entidad clínica y que no solamente pueda ser descrita como una patología individual.

Los índices desarrollados para analizar los trastornos temporomandibulares son los siguientes (Díaz, 2021):

Índice de Friction

En 1985, Friction propuso el índice craneomandibular, el cual abarca dos índices: de palpación y disfunción. Para el primero, se coloca el dedo índice al lado lateral de la cresta alveolar y encima de los molares maxilares, luego, se avanza distalmente, medialmente y hacia arriba, para conocer el estado de los músculos masticatorios. El segundo índice se divide en dos ítems: ruidos en la ATM y movimientos mandibulares (Ponce *et al.*, 2018). Tiene por objetivo medir objetivamente la severidad del problema, como las tensiones articular y muscular, los ruidos articulares y el movimiento mandibular, para lo cual se consideran criterios claros y métodos clínicos fáciles y simples de calificar.

En el caso del índice craneomandibular de Friction (ICM), la determinación de la existencia de algún problema articular es realizado de forma detallada pero desordenada, porque en cada uno de los ítems que constituyen este índice se encuentran preguntas para evaluar la articulación y examinar la ausencia o la presencia de clic recíproco, clic de apertura no reproducible, clic reproducible en cierre, clic reproducible solo en lateralidad, clic de apertura reproducible, burbujeo, y crepitación gruesa o fina.

Sistema H

Es un sistema experto difuso que fue elaborado para simplificar y sistematizar el examen clínico de TTM para su diagnóstico y pronóstico. En este sistema se recoge la información de los signos y los síntomas de un paciente con trastornos temporomandibulares.

Índice de Krogh-Paulsen

El primer intento para estandarizar los criterios clínicos fue efectuado en 1969 por Krogh-Paulsen. Este índice está constituido por nuevos ítems y su valor es solamente preventivo porque no brinda información sobre la severidad del TTM.

TMJ Scale

Es un cuestionario autoinformado por 97 ítems y está constituido por tres dimensiones: global, psicosocial y física. Es una herramienta utilizada para evaluar de modo integral porque considera la valoración de factores, como trastornos psicológicos y estrés. El inconveniente principal de este cuestionario es la cantidad de ítems y debido a que es realizado bajo la percepción subjetiva del paciente, el resultado puede ser sesgado.

Índice de Helkimo

Fue el primer índice desarrollado con fines epidemiológicos. Abarca tres dimensiones: índice de situación oclusal, índice anamnésico e índice de disfunción clínica.

3.4. Análisis factorial: concepto

El análisis factorial es una técnica estadística utilizada para reducir los datos. Se usa para explicar las correlaciones entre las variables, debido a que permite explorar de manera más precisa las dimensiones subyacentes o las variables observadas. Es una técnica estadística de reducción de dimensionalidad de datos que, a partir de una cantidad alta de variables correlaciones, permite hallar una cantidad reducida de variables que tienen una correlación baja entre sí y que, de forma simultánea, explican una proporción alta de la variabilidad de los datos (Morales *et al.* 2020).

Los métodos que suelen ser utilizados para realizar un análisis factorial son los siguientes (Ortega, 2021):

- Análisis de componentes principales; método más utilizado. Se extrae la máxima varianza y se coloca el primer factor. Después, se elimina la varianza por los primeros factores y se extrae la varianza máxima para el segundo factor.
- Análisis común: consiste en extraer la varianza común, la cual es colocada en factores. Es un método que no incluye la variación única.
- Factorización de imágenes: es un método que se basa en la matriz de correlación. Es utilizado para predecir el factor en la factorización de imágenes.
- Método de máxima similitud: se trabaja sobre la métrica de correlación y emplea el método de máxima similitud para la factorización.

Existen dos modelos de análisis factorial (López-Aguado & Gutiérrez-Provecho, 2019):

- Exploratorio: su objetivo es descubrir la estructura subyacente a partir de una serie de datos cuantitativos para definir un número pequeño de dimensiones latentes comunes que permitan explicar la mayor parte de la varianza que se observa en un conjunto mayor de variables.
- Confirmatorio: los factores son conocidos *a priori*, usualmente descritos en la teoría, y tiene por objetivo comprobar si la estructura teórica previa se ajusta a los datos mediante el contraste de hipótesis.

3.5. Procedimiento del análisis factorial

El procedimiento del análisis factorial es amplio, por lo cual es preciso detallar y conocer los términos que se emplean durante su desarrollo (Hananel, 2015; Urbina y Cárcena, 2019):

- Comunalidad: es la proporción de la varianza de la variable relativa a un factor determinado.

- **Determinante:** en el análisis multivariante, es el determinante clásico de la matriz de correlaciones de aquellas variables que se han examinado. Generalmente, suele ser un escalar. Si se presentan intercorrelaciones altas, es baja; si hay intercorrelaciones altas, es alta; si algunas de las variables son dependientes, es nula.
- **Test de esfericidad de Bartlett:** es la prueba estadística que comprueba que la matriz de correlaciones está próxima a la matriz identidad; en otros términos, las variables no tienen una correlación significativa, motivo por el que el determinante de la matriz de correlaciones está cerca de 1. Es una prueba perteneciente a chi cuadrado.
- **Índice de Kaise-Meyer-Olkin (KMO):** es un estadístico multivariante. Utiliza una serie de condicionales, los cuales son los siguientes:

$$\begin{array}{llll}
 \{1.0 \geq KMO \geq 0.9 \rightarrow \text{Muy bueno} & 0.9 \geq KMO \geq 0.8 & & \\
 \rightarrow \text{Meritorio} & 0.8 \geq KMO \geq 0.7 & \rightarrow \text{Mediano} & 0.7 \\
 \geq KMO \geq 0.6 & \rightarrow \text{Mediocre} & 0.6 \geq KMO \geq 0.5 & \\
 \rightarrow \text{Bajo pero aceptable} & KMO \geq 0.5 & \rightarrow \text{Inaceptable} &
 \end{array}$$

- **Correlación anti-imagen:** coeficiente definido como el valor negativo del coeficiente de correlación parcial. Para que el análisis factorial sea razonable, es necesario que existan pocos coeficientes altos.
- **Medida de adecuación de la muestra (MSA):** se utiliza la siguiente ecuación

$$MSA_i = \frac{\sum_{j \neq i} r_{ij}^2}{\sum_{j \neq i} r_{ij}^2 + \sum_{j \neq i} a_{ij}^2}$$

En la que r_{ij} es la correlación simple y a_{ij} es la correlación parcial. En caso se obtengan valores bajos no se aconseja usar el análisis factorial.

Ahora, el procedimiento es el siguiente:

A partir de una matriz de correlaciones, el análisis factorial extrae otra matriz para reproducir la matriz inicial de una manera más sencilla. La nueva matriz es denominada matriz factorial. Tiene elementos que pueden ser interpretados como índices de correlación entre la variable y el factor. Los coeficientes reciben el nombre de pesos factoriales y se pretende que el peso de cada variable sea alto para un determinado factor y bajo para los factores restantes. El valor máximo de los pesos materiales es uno y el máximo valor que el autovalor puede alcanzar es igual al número de variables.

Posteriormente, los cálculos del análisis factorial se realizan partiendo de la matriz reducida, la cual está constituida por coeficientes de correlación entre las comunales en la diagonal y las variables. Debido a que la comunalidad no puede ser determinada hasta conocer los factores, no puede utilizarse el método de componentes principales porque la comunalidad tomaría el valor inicial uno.

Según lo descrito, la matriz factor señala la relación entre las variables y los factores. No obstante, en la mayoría de las veces es difícil interpretar los factores y, para facilitarla, se realizan las rotaciones factoriales. La saturación factorial son los coeficientes que son utilizados para expresar una variable estandarizada como combinación lineal de los factores; así también, representan la correlación entre el factor y la variable si no se correlacionan.

La rotación factorial depende de la selección de la solución más interpretable y sencilla. Esta rotación consiste en hacer girar los ejes de coordenadas, los cuales representan a los factores, hasta que se aproximen al máximo de las variables donde se encuentran saturados. La saturación de los factores transforma la matriz factorial inicial en matriz factorial rotada, que es de fácil interpretación. La matriz factorial rotada explica la misma varianza.

Las comunales no sufren alteración alguna, pero la varianza relativa cambia a cada factor. Con la rotación se pretende que cada matriz pueda verificar las propiedades deseadas, es decir, que cada factor tenga pocos pesos altos y los factores restante sean próximo a cero, además de que cada variable no esté saturada a excepción de un factor y no existan factores que tengan la misma distribución, en otros términos, los factores diferentes deben presentar distribuciones de cargas bajas y altas distintas.

Existen varios métodos de rotación y los más utilizados son los siguientes (Bustamante-Rengifo, 2019):

- Rotación ortogonal: es un método utilizado para facilitar la interpretación de las soluciones factoriales. Las rotaciones ortogonales abarcan cuartimax, equamax y varimax, que son rotaciones perpendiculares a los factores y los ejes que permiten maximizar la varianza relativa.
- Rotación oblicua: ofrece resultados más claros por ser más realista.

Para la fase de interpretación se consideran los siguientes pasos:

1. Ordenar la matriz rotada para que las variables con saturaciones altas en un factor aparezcan juntas.
2. Estudiar la composición de las saturaciones factoriales de cada factor.
3. Nombrar a los factores

En caso de que el método de extracción sea el clásico, solo se podrán hacer estimaciones. Si se escogen los componentes principales, el cálculo de los pesos factoriales debe realizarse partiendo de la matriz factorial rotada y tiene como base el modelo de regresión múltiple.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS FACTORIAL DE LOS TTM Y MODELIZACIÓN BIOMECÁNICA Y VARIACIONAL DEL PROCESO DE OCLUSIÓN

Los trastornos temporomandibulares son problemas que afectan a un amplio número de personas. Debido a esto, se han realizado investigaciones para determinar sus causas y mejorar los tratamientos que se aplican. Para esto, se procede con el análisis biomecánico, que consiste en estudiar los movimientos de una persona, lo cual es crucial para conocer la actividad motora que se quiere analizar. Con esta información, es posible estudiar los TTM e identificar cómo el análisis factorial y la formulación variacional inciden en su mejora, especialmente, en el proceso de oclusión.

En este capítulo se introducen los conceptos que se usan para modelizar el proceso de oclusión, por ejemplo, el tensor de deformación, el vector de desplazamiento, el tensor de tensiones, el vector de tensión y la función de deformación. Conjuntamente, se establecen tres tipos de relaciones: entre el tensor de tensiones y el vector de tensión; entre el vector de desplazamiento y el tensor de deformación; entre el tensor de deformación y el tensor de tensiones. Cabe precisar que el problema de oclusión es analizado como un problema mixto de evolución de segundo orden, con condiciones iniciales en tiempo y de contorno de espacio. De esta manera, se intenta llegar al resultado esperado, esto es, un resultado de convergencia de la solución discreta en cada nodo temporal a la función de desplazamiento haciendo uso del método de elementos finitos, con el que se demuestra la unicidad y la existencia de solución de los problemas discretos en espacio.

4.1. Análisis factorial para el problema de los trastornos temporomandibulares

Luego de que el sistema H haya recogido los datos de los 85 pacientes, estos son exportados a una ficha, el cual se importa al *software* SPSS. En este programa se obtiene una base de datos necesaria para proceder con la aplicación de la técnica multivariante.

Prueba de hipótesis en TTM

H0: Las variables del sistema estomatognático v con la presencia de TTM no están correlacionadas en la población objeto de estudio.

H1: Algunas variables del sistema estomatognático que tienen mayor relación con la presencia de TTM se correlacionan con la población objeto de estudio.

Para realizar el análisis factorial, primero se analiza su viabilidad mediante la aplicación del índice KMO y el test de esfericidad de Bartlett.

Para contrastar la hipótesis nula (H_0) se utiliza el método de esfericidad de Bartlett por medio de la prueba $\chi^2_{(435)}$, a partir de lo cual se obtiene como probabilidad de cometer error tipo I de $p = 0$. Debido a que $p < 0.05$, se procede con el rechazo de H_0 , por tanto, se concluye que algunas variables se correlacionan y es posible realizar el análisis factorial.

Respecto a la presente investigación, se obtuvo el valor de KMO de 0.554; por ello, se acepta la aplicación del análisis factorial, como se observa en la Tabla 3.

Tabla 3: Informe del índice KMO y de la prueba de Barlett

Medida Kaiser-Meyer-Olkin de adecuación de muestreo	0.554
Aprox. Chi-cuadrado	1675.774
Prueba de esfericidad de Bartlett	
gj.	435
Sig..	0.000

Nota. Tomado de Hananel (2015)

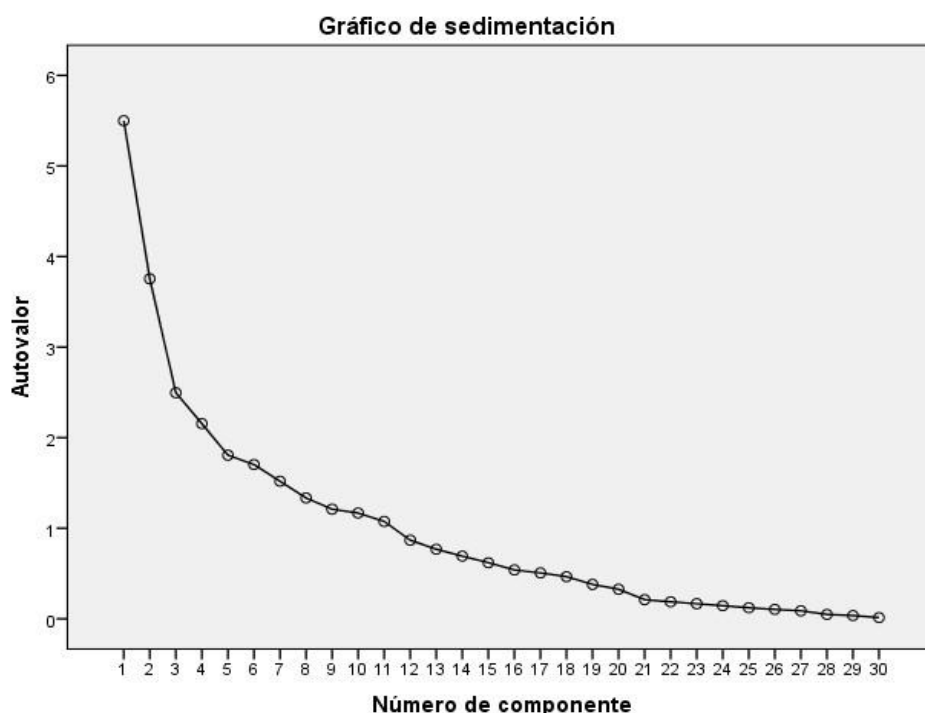
Ahora, se utiliza la prueba de Spearman para evaluar los coeficientes de correlación entre las frecuencias de cada variable. Una vez realizado dicha evaluación se procede con la eliminación de las variables que tiene una correlación menor positiva, con la finalidad de iniciar el análisis factorial con un número menor de variables y lograr una mejor correlación entre ellas.

Cuando se inicie el análisis factorial se procede con la reducción del número de variables, por diversos métodos: eliminación de algunas primarias, creación que nuevas variables que resumen las anteriores o asociación de dos o más variables en una sola. Con las variables finales se efectúa de nuevo en análisis de correlación (Pearson), donde se destacan los valores significativos ($p < 0.01$).

En los siguientes párrafos, se comienza con la extracción de factores por medio del método de elementos principales. Después, se realiza el análisis de la matriz de correlaciones sin aplicar un método de rotación, con el propósito de observar si los resultados que se obtuvieron son suficientes o se requiere aplicar otro método de extracción. Conjuntamente, se analizan los autovalores para la determinación de los factores.

En correspondencia a la información recogida, y de acuerdo con los resultados, se determinó que deben seleccionarse 11 componentes (factores) porque los autovalores de cada uno de estos son mayores a uno, lo cual se aprecia en el gráfico de sedimentación que se presenta en el informe del programa en la Figura 3.

Figura 3: *Gráfico de sedimentación para la selección de factores*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Por otra parte, se identifica que el 85 % de la variabilidad total de los datos puede explicarse mediante los 11 factores escogidos. Cabe precisar que dicha variabilidad tuvo una cantidad bastante aceptable, como se observa en la Tabla 4. Los factores 1 y 2 contienen una parte de la variabilidad del 18.3 % y 12.5 %, correspondientemente; de acuerdo con las descripciones se puede identificar la variabilidad de los factores restantes.

Por último, se obtiene la solución rotada como resultado de un segundo análisis, para lo cual se elige el método Varimax a fin de obtener los pesos factoriales, según se observa en la Tabla 5. Desde un punto de vista práctico, se considera el criterio de correlaciones significativas teniendo en cuenta que cada coeficiente correlacional debe ser mayor que 0.6. Después de terminar con el análisis factorial se concluye que las 30 variables están agrupadas en 11 factores, tal como se aprecia en la Tabla 6.

Tabla 4: Método de extracción: análisis de componentes principales. Varianza total explicada

Componente	Autovalores iniciales			Sumas de extracción de cargas al cuadrado			Sumas de rotación de cargas al cuadrado		
	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado	Total	% de varianza	% acumulado
1	5.499	18.331	18.331						
2	3.753	12.511	30.842						
3	2.496	8.320	39.162						
4	2.154	7.182	46.344						
5	1.807	6.023	52.367						
6	1.703	5.676	58.043						
7	1.518	5.060	63.103						
8	1.334	4.445	67.549						
9	1.210	4.035	71.583						
10	1.168	3.892	75.475						
11	1.075	3.582	79.057	5.499	18.331	18.331	3.579	11.929	11.929
12	.867	2.892	81.949	3.753	12.511	30.842	2.858	9.526	21.455
13	.768	2.560	84.509	2.496	8.320	39.162	2.763	9.210	30.665
14	.692	2.305	86.814	2.154	7.182	46.344	2.314	7.714	38.379
15	.619	2.063	88.877	1.807	6.023	52.367	2.002	6.673	45.052
16	.539	1.798	90.674	1.703	5.676	58.043	1.980	6.600	51.652
17	.507	1.689	92.364	1.518	5.060	63.103	1.965	6.549	58.201
18	.465	1.550	93.914	1.334	4.445	67.549	1.757	5.856	64.058
19	.379	1.264	95.178	1.210	4.035	71.583	1.708	5.693	69.751
20	.326	1.088	96.266	1.168	3.892	75.475	1.468	4.894	74.645
21	.211	.704	96.970	1.075	3.582	79.057	1.324	4.412	79.057
22	.187	.625	97.595						
23	.166	.554	98.149						
24	.145	.483	98.632						
25	.121	.405	99.037						
26	.104	.346	99.383						
27	.088	.294	99.677						
28	.048	.160	99.837						
29	.036	.119	99.956						
30	.013	.044	100.000						

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Tabla 5: Matriz de componentes rotados

	Componente										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
DoLtl	.885	-.011	-.069	-.094	-.076	.095	-.021	.053	-.031	.144	-.071
ResAp	.847	.095	.111	.086	.143	-.080	-.064	.229	-.081	.005	.035
DesLtAp	.039	.270	-.645	.203	.117	-.169	.062	-.079	-.107	-.032	.156
DoAp	.825	-.123	.092	.173	-.141	-.153	.157	.113	-.110	.062	.057
CREYCL.D	-.039	.012	-.043	.063	-.105	.002	-.006	-.025	.874	.173	-.109
CREYCL.I	-.015	.010	.086	-.116	.055	-.032	.063	.044	.842	-.197	.100
ChRpCD	-.036	.052	-.073	.029	-.030	-.097	.896	.002	-.008	.055	-.034
ChRpCI	-.067	.020	-.049	.173	.066	-.090	.862	.031	.067	-.015	.004
CrFnD	.272	.601	-.290	.313	.000	.134	.245	-.097	-.067	-.057	.196
CrFnI	.229	.458	-.315	.336	-.050	.074	.169	-.082	-.206	.080	.383
CrGrD	-.078	-.001	-.101	.052	-.074	-.045	-.212	.003	-.009	.307	.726
DoTeAD	.365	.294	.025	.233	.054	.057	.088	.741	.041	.093	-.050
DoTeAI	.178	.245	.165	.042	.121	-.016	-.001	.849	-.026	.049	-.002
DoMaAnD	.213	.831	.086	.002	.057	-.018	-.003	.267	.021	.007	-.103
DoMaAnI	-.062	.844	.146	.023	.091	-.061	-.002	.336	.050	.012	-.108
DoPtLD	.249	.355	.781	-.080	-.026	.156	-.023	.027	.091	.103	-.041
DoPtLI	.113	.332	.815	-.071	.000	.128	-.010	.060	.111	.115	-.019
ECMSYES.D	.023	.057	-.054	.142	.902	.101	.081	.048	.010	-.009	.060
ECMSYES.I	.027	.067	.036	.256	.890	.064	-.070	.106	-.054	.088	-.050
DoInsOcDTr	.047	.039	-.100	.901	.181	.000	.169	.128	.020	-.038	-.083
DoInsOCITr	.069	.080	-.038	.899	.236	-.079	.055	.085	-.063	-.090	-.014
DoCpPNo	.664	.387	.143	.034	.098	.131	-.172	-.049	.099	-.103	-.097
DoCpSNo	.692	.389	.051	.014	.101	.184	-.121	.155	.105	-.032	-.049
CeBi	-.059	-.196	.104	-.338	.136	.057	.242	-.032	.027	-.276	.674
INuPzPt	.016	-.197	.656	.100	.104	.086	-.082	.052	-.217	.006	.104
LaDLT	-.049	-.004	.304	-.116	.357	-.061	.182	-.349	-.145	.441	-.114
LaILT	.078	.010	.176	-.043	.036	.046	-.003	.114	.015	.854	.125
LaDLnoT	-.005	.022	.292	.035	.075	.816	-.194	.006	.110	.007	.075
LaILnoT	.008	.033	.227	-.009	.072	.864	-.084	-.006	-.135	-.046	-.059
ConProt	.162	-.052	-.198	-.224	.050	.565	.102	.053	-.002	.448	-.004

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Método de extracción: análisis de componentes principales

Método de rotación: Varimax con normalización Kaiser.

a. La rotación ha convergido en 14 iteraciones

Considerando los resultados, se procede con la identificación de la relación de variables que poseen la correlación más alta en cada factor y se muestra un listado de factores con las variables del sistema estomatognático correspondiente. Esto se presenta en la Tabla 6.

Tabla 6: Variables obtenidas para cada uno de los factores extraídos

Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4	Factor 5	Factor 6	Factor 7	Factor 8	Factor 9	Factor 10	Factor 11
DoLtl ResAp DoAp DoCPNo DoCpNo	CrFnD CrFnI DoMaAnD DoMaAnI	DesLtAp DoPtLD DoPtLI IPzPtes	DoInsOcDTr DoInsOcITr	ECMSYE.D ECMSYE.I	LaDLnoT LaILnoT ConProt	ChRpCD ChRpCI	DoTeAD DoTeAI	CREYCL.D CREYCL.I	LaDLT LaILT	CrGrD CeBi

Nota. Tomado de Hananel (2015)

El sistema H tiene la capacidad de guardar las variables y los resultados obtenidos en el análisis factorial, por si se desea trabajar con estos posteriormente.

El paso de mayor importancia en el análisis factorial es la interpretación y la nomenclatura que se otorga en el análisis final; por esto, a cada factor se le brinda un nombre respectivo según su composición. Para esto, se decide si debe desarrollarse un cambio solamente numeracional por medio de la indexación que se observa en la Tabla 7 de acuerdo con la opinión proporcionada por los expertos en TTM por la cronicidad de la pertenencia a los factores y las semejanzas identificadas con el estudio de Ohashi *et al.* (2002). La modificación mencionada se aprecia en la Tabla 8 y la nomenclatura de los factores se detallan en acápites posteriores.

Tabla 7: Reindexación de los factores.

$F_1 \rightarrow F_1$	$F_2 \rightarrow F_2$	$F_3 \rightarrow F_3$	$F_4 \rightarrow F_4$	$F_5 \rightarrow F_5$	$F_6 \rightarrow F_6$
$F_7 \rightarrow F_7$	$F_8 \rightarrow F_8$	$F_9 \rightarrow F_9$	$F_{10} \rightarrow F_{10}$	$F_{11} \rightarrow F_{11}$	

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Tabla 8: Variables obtenidas para cada factor reindexado

Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 4	Factor 5	Factor 6	Factor 7	Factor 8	Factor 9	Factor 10	Factor 11
DoLtl ResAp DoAp DoCpPNo DoCpPNo	CrFnD CrFnI DoMaAnD DoMaAnI	DesLtAp DoPtLD DoPtLI IPzPtes	DoInsOcDTr DoInsOcITr	LaDLnoT LaILnoT ConProt	ChRpCD ChRpCI	ECMSYE.D ECMSYE.I	LaDLT LaILT	DoTeAD DoTeAI	CREYCL.D CREYCL.I	CrGrD CeBi

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Nomenclatura y descripción de los factores

La descripción de los factores fue realizada por Paredes y Kobayashi, expertos en TTM.

- Factor 1: Trastorno inflamatorio articular con trastorno funcional mandibular.

Las variables que predominan dan a conocer que el factor 1 se relaciona con un problema de trastorno inflamatorio articular con alteración funcional del movimiento de la mandíbula, posiblemente, por dolor. Esto es deducido partiendo de los variables conseguidos durante el dolor a la palpación de la cápsula superior nominal y posterior (0.70 y 0.67, correspondientemente) y por la restricción en apertura (Koolstra & Ejiden, 1997) y dolor en apertura y lateralidad izquierda (0.85, 0.82 y 0.88, correspondientemente). Es de conocimiento que los movimientos de la mandíbula son restringidos por aquellas personas que sienten dolor articular. Las características clínicas particulares del presente factor indican que existe un problema de tipo sinovitis y capsulitis (Ash *et al.*, 1996).

- Factor 2: Trastorno crónico degenerativo articular con trastorno muscular mandibular por probable parafunción.

Las variables que predominan en este factor se vincula con un trastorno crónico degenerativo articular con sintomatología muscular, el cual pudo ser provocado por parafunción. Es preciso destacar que el primero fue desprendido del valor conseguido por crepitación fina derecha (0.57) y el segundo, por ser los maseteros en su porción anterior lo que registraron dolor durante la palpación bilateral (0.83, 0.85). Los valores expuestos son semejantes a los encontrados en la investigación de Magnusson *et al.* (2000), en el que se analizó los signos y síntomas de los trastornos temporomandibulares y se identificó que estos tienen una correlación alta con la fatiga muscular, los ruidos articulares, el rechinar y el apretamiento, teniendo a la porción anterior del masetero

como uno de los tres músculos que evidenciaron una frecuencia mayor de dolor durante la palpación.

- Factor 3: Trastorno degenerativo crónico con desorden muscular y funcional mandibular, con alteración de la estabilidad oclusal

Las variables que representan a este factor evidencian un trastorno degenerativo crónico con trastornos funcional y muscular, y con alteración de la estabilidad oclusal, lo cual es dado por los valores de crepitación fina bilateral (0.35, 0.33), inversa por cien del número de piezas presentes (0.66) y dolor a la palpación de los pterigoideos laterales de ambos lados (0.80 y 0.77). Los valores que se encuentran bajo las variables de crepitación fina se mantuvieron en el factor dado, lo cual se comprobó al intentar retirarlos, ya que se observó la alteración negativa de los valores de las otras variables del análisis factorial. En la investigación de Matsuka *et al.* (2013) sobre la prevalencia de signos y síntomas de TTM realizado en 672 personas de origen nipón, se halló un porcentaje de frecuencia similar a los que se encontraron en poblaciones cuyas características racionales no eran igual: 21 % de sensibilidad muscular masticatoria y 19% de crepitación. Los pterigoideos laterales fueron encontrados entre los grupos musculares evaluados. Como una información de suma importancia se encontró que la crepitación fue más frecuente en grupos etáreos mayores; no obstante, este hallazgo se relaciona con la cantidad de dientes perdidos, principalmente, cuando no hay molares. De manera adicional, se concluyó que la cantidad de dientes que se pierden se vinculan con el aumento de síntomas de TTM, lo cual es respaldado en la investigación de Wadhwa *et al.*, (1993), donde se identificó que el pterigoideo lateral es uno de los músculos que presenta una frecuencia mayor de dolor en pacientes diagnosticados con TTM.

- Factor 4: Trastorno crónico de los músculos de la nuca
- Factor 7: Trastorno crónico con sintomatología muscular cervical.

En estos factores, las variables definen de forma específica un trastorno crónico de los músculos de la nuca para el cuarto factor, lo cual es dado por la

inserción occipital del trapecio de los dos lados (0.90, 0.90) y, para el séptimo factor, por la inserción superior del esplenio de ambos lados y el esternocleidomastoideo (0.90, 0.92). No se han realizado muchos estudios sobre este tema, sin embargo, algunos investigadores indican que hay una relación estrecha entre los TTM con las alteraciones cervicobraquiales, ya que los TTM pueden ser factores que predisponen de alteraciones cervicobraquiales, de acuerdo con lo sugerido por Kirveskari y Alanen (1985). Así también, algunos autores afirman que la posición de la cabeza en una columna vertical depende de los músculos anteriores y posteriores del cuello (dorsales del cuello, esternocleidomastoideo y trapecio); por ello, se sugiere que las personas con TTM y dolor cervical acudan a terapia física para tener una postura adecuada.

- Factor 5: Trastorno crónico oclusal en movimientos excéntricos (lateralidad lado de no trabajo y protusiva).
- Factor 8: Alteración crónica oclusal en movimientos excéntricos (lateralidad lado de trabajo).

Las variables de los factores 5 y 8 tienen un trastorno crónico oclusal en movimientos excéntricos. De manera general, el análisis factorial de las variables oclusales suelen constituir grupos de factores aislados; no obstante, su presencia es esencial para que se garantice la estabilidad en todo el análisis, como pudo ser comprobado cuando se hizo el intento de retirarlos del factorial. En algunas investigaciones, como la de Funakoshi *et al.*, (1976) se hallaron que en las personas a quienes se les colocaron restauraciones 0.3 mm en las segundas molares se producía un desbalance en la actividad muscular postural y les creaba interferencias oclusales. Ingervall y Carlsson (1976) en el estudio que realizaron concluyeron que las personas que presentaban interferencias naturales en excursivas no podían elevar su ni fuerza de mordida ni los niveles de actividad muscular postural; no obstante, sí hubo una alteración en sus ciclos de masticación; conjuntamente, los autores señalaron que las interferencias del

lado de balance (no trabajo) producen una alteración mayor en los niveles de actividad a diferencia de las interferencias del lado de trabajo.

- Factor 6: Trastorno crónico articular de desarreglo condilo-disco (cierre)
- Factor 10: Trastorno crónico articular de desarreglo condilo-disco (Apertura, cierre, lateralidad).

En las variables de los factores 6 y 10 se describe un trastorno crónico articular de desarreglo condilo-disco. Para el sexto factor, se identifica que hay un chasquido reproducible en cierre en TTM de ambos lados (0.86, 0.90) y, para el décimo factor, en chasquido reproducible en lateralidad de ambos lados y recíproco (0.86, 0.86). A pesar de que existen discrepancias respecto al real significado de los ruidos articulares en los TTM se ha demostrado en varios estudios, como el de Widmalm *et al.*, (1992), que los TTM y el chasquido se tienen una relación estadísticamente significativa. Cabe precisar que en la investigación de Widmalm *et al.*, (1992) se registró prequirúrgicamente, con un estetoscopio, el sonido de 29 articulaciones antes de iniciar la operación en los sujetos que constituyen la muestra. Las ATM con chasquido recíproco evidenciaron tener un desplazamiento de disco con reducción y las silentes y con crepitación mostraron un desplazamiento del disco sin reducción. Conjuntamente, se comprobó que el total de las ATM con chasquido recíproco y la mayoría de las silentes muestran superficies no artrósicas. Gale *et al.* (1984) realizó un estudio donde aplicó un cuestionario a 173 expertos, a partir de los cuales identificó que para más del 50 %, la presencia de síntomas, como el chasquido, no es importante.

- Factor 9: Trastorno crónico con trastorno muscular masticatorio.

Las variables del masetero anterior izquierdo con menor peso (0.31) y dolor a la palpación de los músculos temporales anteriores de ambos lados (0.88, 0.79) evidencia un trastorno crónico muscular masticatorio. En la investigación realizada por Machado *et al.* (2010) se aborde los TTM y cómo se relaciona

con los componentes etiológicos de oclusión. Molina *et al.* (1999) elaboró un estudio donde se abordó el estudio clínico de síntomas y signos de TTM en bruxomanos clasificados por grado de severidad, a partir de lo cual se encontró que la condición de bruxomano es un elemento significativo en la progresión y la etiología de los trastornos musculares y articulares masticatorios. En estos grupos musculares se pueden encontrar los maseteros y los temporales. Se concluye que conforme el grado de severidad de la parafunción aumenta, también incrementa el daño ocasionado en los músculos. Lundh y Westesson (1991) encontraron una prevalencia de 51 % en los pacientes diagnosticados con dolor muscular en bruxómanos

- Factor 11: Trastorno crónico degenerativo con alteración de la estabilidad oclusal.

La variable céntrica binomial (0.78) y crepitación gruesa derecha (0.61) tienen un trastorno crónico degenerativo con alteración de la estabilidad oclusal. En la investigación de Widmalm *et al.* (1992) se observa que la ATM con crepitación no siempre presenta superficies artrósicas, por lo que se señala que la crepitación no es un símbolo altamente confiable para que se afirme que la persona tiene artrosis. Gale *et al.* (1984) concluyó que la crepitación por sí sola es fundamental y suele estar acompañada por otros síntomas que pueden ser considerados indicadores de patologías. Basándose en estos factores, se crearon las leyes lógicas difusas del sistema H en MATLAB con la finalidad de obtener la pertenencia del sujeto de prueba en cada uno de los factores de los TTM que fueron adquiridos por el factorial. Tales pertenencias deben aportar con la generación de funciones de tracción y sus valores máximos.

En suma, por medio del análisis factorial, las 30 variables significativas (dimensión original) del sistema estomatognático se reducen a 11 factores en los que se explica de manera similar el sistema H.

4.2. Modelización biomecánica y variacional del proceso de oclusión

Un cuerpo en un espacio tridimensional R^3 se define como un conjunto abierto $\Omega_0 \subset R^3$ con frontera $\partial\Omega_0$. La posición de un cuerpo se define por la siguiente aplicación: $\Omega_0 \times [0, T] \rightarrow R^3$ y el movimiento de un cuerpo, por el grupo de posiciones que el cuerpo asume por un tiempo $\Omega t = (\Omega_0, t), \forall t \in [0, T]$.

El punto material X de un cuerpo es aquel punto que se encuentra en la posición Ω_0 , en cambio, el punto espacial de trayectoria (x, t) es aquel lugar que el punto material ocupa por un tiempo determinado (t) .

Para cada $t \in [0, T]$ se define

$$\begin{aligned} \epsilon_t : \Omega_0 &\rightarrow R^3 \\ x &\rightarrow \epsilon_t(x) = \epsilon(x, t). \end{aligned}$$

La función ϵ_t también es denominada deformación en el tiempo t .

Cuando se produce la deformación de un medio continuo, se produce el cambio de posición en el espacio de sus partículas materiales. Este cambio de posición es representado por el vector de desplazamiento $u = (u_1, u_2, u_3)$.

La deformación es entendida como un campo vectorial, cuya matriz jacobiana asociada $\frac{\partial \epsilon(x, t)}{\partial x}$ se denota por D . Se define de la siguiente forma:

$$D = (\epsilon_{11} \ \epsilon_{12} \ \epsilon_{13} \ \epsilon_{21} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{31} \ \epsilon_{32} \ \epsilon_{33})$$

Cada componente de la matriz anterior (tensión de deformación) representa una función en particular sobre las coordenadas del cuerpo obtenidas como combinación de derivadas en el campo de desplazamientos de los puntos del cuerpo. Particularmente, aunque el desplazamiento y la deformación son conceptos distintos, se relacionan a través de la siguiente ecuación (ecuación 1).

$$\epsilon_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \right), i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$$

La matriz D o tensor de deformación, es simétrica y se encarga de caracterizar el cambio de volumen y forma de un cuerpo. Cuando se inicia con el proceso de caracterización de deformaciones muy pequeñas (menor a 0.01) es posible despreciar el tercer sumando de la igualdad. Lo que sigue sin pérdida de generalidad será considerado D en su versión infinitesimal como la matriz en mención.

El tensor D en coordenadas cartesianas se expresa del siguiente modo:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Esto implica lo siguiente:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{31} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right),$$

$$\epsilon_{23} = \epsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right),$$

Donde $u = (u_1, u_2, u_3)$ representa el campo vectorial de desplazamientos del cuerpo y por simplicidad en la notación (x_1, x_2, x_3) serán las coordenadas de cada punto material x del cuerpo.

Una deformación es homogénea si se identifica que D es constante. El comportamiento de una deformación, en la vecindad de un punto, es homogénea. El único tipo de deformación de interés físico es aquella donde el determinante de D es positivo, por lo que no ocurre ninguna penetración de las diversas partes del cuerpo. Uno de los casos más simples de deformación homogénea que cumple con el criterio expuesto es la traslación pura, en que el gradiente de deformación es el tensor unitario de segundo orden.

En el caso más general, la deformación se describe por medio de un tensor de deformaciones; en cambio, los esfuerzos interiores que se producen en el material requieren que se representen por un tensor de tensiones. Es preciso destacar que la tensión mecánica o simplemente tensión, se define como la fuerza por unidad de área en el entorno de un punto material sobre la superficie real de un medio continuo.

Las unidades de presión es la forma en que se expresa la tensión mecánica. En el Sistema Internacional de Unidades, la unidad utilizada para expresar la tensión mecánica es el pascal ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$). No obstante, debido a la naturaleza de los componentes del sistema estomatognático deben ser considerados unidades exageradamente grandes o muy pequeñas según sea el caso. Por esto, es necesario considerar las conversiones de mayor uso.

$$1 \text{ Pa} = 10^{-6} \text{ Pa} \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right) = 10^{-9} \text{ GPa} = 10^{-4} \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

La tensión normal es aquella que actúa de forma perpendicular al plano; en cambio, la tensión tangencial o cortante es la que actúa tangente al plano. Por otro lado, la fricción o el rozamiento es la fuerza que, después de generar contacto, se opone al movimiento tangencial (Cartan, 1997; Chau & Motreanu, 2002).

Se denomina vector tensión T en toda la longitud de la superficie, de vector normal $n = (n_1, n_2, n_3)$ unitario y perpendicular a la superficie, al producto matricial $T = \sigma n$. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$(T_1 \ T_2 \ T_3) = (\sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{21} \ \sigma_{22} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{32} \ \sigma_{33}) (n_1 \ n_2 \ n_3)$$

Una función lineal de n es el vector tensión T ; es decir, $T = \sigma(n)$, en el que σ es lineal.

La relación lineal entre n y T sigue las leyes fundamentales de equilibrio estático de fuerzas y conservación de momento lineal (Igit *et al.*, 2001).

Como cualquiera de las aplicaciones lineales entre los vectores, el tensor

de tensiones se representa en cualquiera de los sistemas de coordenadas cartesianas escogidas por una matriz real de orden 3. Depende de si las coordenadas pueden ser numeradas por medio de x_1, x_2, x_3 , para que exista la posibilidad de que la matriz pueda escribirse como

$$(\sigma_{11} \sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{21} \sigma_{22} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{32} \sigma_{33})$$

Sea $\sigma_{ij}(x)$, con $i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$, la matriz que representa la j -ésima elemento de la fuerza que el volumen del sólido localizado a un lado del plano perpendicular ejercer al eje OX , en el punto x ; por tanto, es posible que se arme una matriz $\sigma(x) = (\sigma_{ij}(x)) = (\sigma_{ji}(x))$, la cual se denomina tensor de tensiones de Cauchy en el punto x del sólido Ω .

Los elementos del tensor de tensiones de Cauchy cumplen la asociación en que todo punto en un material satisface las ecuaciones de equilibrio (movimiento de Cauchy de movimiento para aceleración cero). Se precisa que el principio de conservación de momento angular implica la simetría del tensor de tensores; es decir, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, y $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ y de donde $\sigma = \sigma_{ij}(x) = \sigma_{ji}(x)$ (Igit *et al.*, 2001).

El tensor de tensiones de Cauchy, también conocido como función σ , es útil para describir todo el estado de tensión de un cuerpo uniformemente tensionado. Por ende, el estado de tensión del medio en cualquier instante o punto puede especificarse por seis parámetros independientes en lugar de nueve. La matriz se reescribe del siguiente modo:

$$(\sigma_1 \sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{12} \sigma_2 \sigma_{23} \sigma_{13} \sigma_{23} \sigma_3)$$

Donde los elementos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ también reciben el nombre de tensiones normales ortogonales (respecto al sistema de coordenadas elegido) y $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ son las tensiones cortantes ortogonales previamente señaladas.

El límite elástico es definido como la máxima tensión que un material es capaz de soportar sin que sufra permanentes deformaciones. El módulo de

Young es el nivel de rigidez de un material. El radio o coeficiente de Poisson es entendido como la relación existente entre las deformaciones relativas en dirección a la fuerza aplicada y las deformaciones relativas en sentido transversal que el material ha sufrido.

Se tiene en cuenta un cuerpo elástico, para el que se cumplen las condiciones de tensión por medio de la Ley de deformación elástica de Hook $\sigma = E\epsilon$, donde σ es la tensión; ϵ , la deformación; E , el módulo de Young (Pietrzak *et al.*, 2002).

La tensión de Von Mises es definida como la magnitud física escalar que es proporcional a la deformación elástica o la energía de distorsión (Ashman & Van Buskirk, 1987). Este tipo de tensión se calcula a partir de las tensiones principales del tensor de tensiones en un punto sólido deformable y se utiliza la siguiente fórmula:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}}$$

La tensión es empleada en el análisis estructural como indicador de un correcto diseño para materiales dúctiles, por ejemplo, el hueso de la mandíbula que posee propiedades semejantes al hierro dúctil. El fallo de una pieza resistente se debe a que, en alguno de sus puntos, la energía de distorsión por unidad de volumen rebasa un umbral determinado. En términos de tensiones, este criterio es escrito como $\sigma_{VM} \geq \sigma_Y$, donde σ_Y , hace referencia a la tensión de límite elástico de la pieza.

En este aspecto, se considera un sólido deformable elástico, así como la distribución de tensiones, con $i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$ que se obtiene a partir de las ecuaciones constitutivas. Además, se observa que se caracteriza por tener un comportamiento lineal por medio del tensor de deformaciones en su versión linealizada en derivadas parciales. Por esto, se generaliza la ley de Hook a la ley de Lamé-Hook (ecuación 2):

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(u) = \frac{E_v}{(1+v)(1-2v)} \left(\sum_{k=1}^3 \delta_{kk} \epsilon_{kk}(u) \right) \delta_{ij} + \frac{E}{1+v} \epsilon_{ij}(u),$$

Donde:

V = coeficiente de Poisson

E = módulo de Young

δ = delta de Kronecker

Así también, se tiene en cuenta que, en todas las direcciones, el sólido tiene las mismas propiedades físicas; por ende, la ecuación 2, se puede expresar del siguiente modo:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-v}{1-2v} & \frac{v}{1-2v} & \frac{v}{1-2v} & \frac{v}{1-2v} & \frac{1-v}{1-2v} & \frac{v}{1-2v} & \frac{v}{1-2v} & \frac{v}{1-2v} & \frac{1-v}{1-2v} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{22} & \epsilon_{33} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} & \epsilon_{23} \end{pmatrix}$$

Para culminar con este apartado teórico, se realiza la descripción del problema de contacto, para lo cual se considera lo explicado por Gilbarg & Trudinger (2001), Grisvard. (1985), Peral (2009) y Raviart & Thomas (1983).

Se toma en cuenta por medio del Γ_c a una frontera de un sólido que puede o no estar soportada. Si se considera una parte de la frontera que podría o no estar soportado y sin fricción por un rígido soporte, y un cuerpo elástico tridimensional; entonces, los puntos de Γ_c podrán estar o no en contacto. Solamente puede predecirse que en los puntos de Γ_c que tengan contacto con el soporte, puede surgir una reacción en la dirección contrario a la normal exterior del cuerpo a diferencia que en los puntos de Γ_c donde se da lugar al apartamiento, ya que el desplazamiento u será en una dirección opuesta a la de la normal exterior al cerpo y no se generará algún tipo de reacción. Se denomina

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^3 g_i n_i u_n = \sum_{i=1}^3 u_i n_i$$

Donde:

u_n = desplazamiento normal. Es un campo escalar que representa el componente normal a la superficie del campo u .

σ_n = tensión normal. Se expresa como $\sigma_n \leq u_n \leq 0$; $\sigma_n u_n = 0$, es decir, es la ley constitutiva del problema de contacto sin fricción o problemas con condiciones de Signorini (ecuación 3).

$\{\sigma_n \leq 0 \rightarrow u_n = 0, \text{ tiene lugar de contacto } u_n \leq 0 \rightarrow \sigma_n = 0, \text{ no tiene lugar de contacto}\}$

A partir de la información biomecánica brindada se procede con la formulación del problema en derivadas parciales que corresponden al movimiento oclusivo de la mandíbula.

4.1. Planteamiento del modelo de oclusión

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el dominio que un cuerpo ocupa será su superficie exterior, siempre que tenga las condiciones necesarias para alcanzar el movimiento desde una determinada posición $x = (x_1, x_2, x_3)$, se considera una mandíbula para actuar como tal y se denota por $\Gamma = \partial\Omega$ (Ascher *et al.*, 1995). El sólido producido por el área mandibular junto con la superficie exterior está dado por $\bar{\Omega}$.

La mandíbula tiene diversas propiedades físicas, por ejemplo, isotropía, homogeneidad y elasticidad, las cuales son propiedades constitutivas del hueso cuando se deforma. La deformación $\epsilon_{ij} = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 3$, es la deformación elástica, la cual se asume cuando la mandíbula logra recuperar su forma inicial cuando se retira la fuerza oclusal que provocó la deformación (Korioth *et al.*, 1993)

Según lo explicado, hay un interés físico cuando se produce la deformación mandibular, lo cual tiene sentido porque, gracias a la rigidez del hueso temporal y las características de la ATM, puede aplicarse una condición de contacto unilateral sin que se roce la parte superior del cóndilo izquierdo, con una posibilidad de contacto pero sin penetración; pues, desde una perspectiva fisiológica, el desplazamiento está restringido por la fosa glenoidea, por lo cual los desplazamientos en dirección tangencial se producen de forma libre (sin tensiones de rozamiento), razón por la que se requiere imponer condiciones de frontera diferentes.

Por ende, dada Γ , la frontera mandibular, debe realizarse una partición de esta considerando lo siguiente:

- Al área superficial donde se genera el contacto se le denota con Γ_c .
- El área de la frontera donde no ocurre el desplazamiento u , denotada por $\Gamma_D (u = 0 \text{ en } \Gamma_D)$.
- La unión disjunta de las nueve superficies de la mandíbula, donde los diversos músculos pueden actuar (digástrico anterior (AD), pterigoideo superior (SP), pterigoideo inferior (IP), temporal posterior (PT), temporal medio (MT), temporal anterior (AT), pterigoideo medial (MP), masetero profundo (DM) y masetero superficial (SM)) tiene una unión arbitraria denotada por Γ_M .

En correspondencia a Γ_C , no puede ser tratado de modo único sin particionamiento por la condición de contacto o Signorini, donde la mandíbula se puede separar del cuerpo rígido o puede presionarlo, lo cual es dado por dos partes definidas: la parte superior del molar Γ_c^m y la parte superior del cóndilo izquierdo Γ_c^c . Respecto a Γ_D no merece algún tipo de partición porque se conoce que al morder, el cóndilo derecho siempre se contacta con el maxilar. Después, la partición de Γ es dado por $\Gamma = (\Gamma_c^c \cup \Gamma_c^m) \cup \Gamma_D \cup \Gamma_M$.

Según los preliminares teóricos se considera, por cada punto mandibular $x \in \underline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, el vector de desplazamiento del punto en oclusión $u(x) = (u_i(x))$, donde $u_i(x)$ es el desplazamiento de x en la dirección OX_i falta para cada $i = 1, \dots, 3$.

En el modelo, se asume que el peso de la mandíbula no influye en la deformación; por ello, se considera solamente a $g = (g_i)$, donde cada $g_i = 1, \dots, 3$, es un componente del vector tracción instituido en el punto; es decir, es la densidad de las fuerzas que los músculos de la oclusión ejercen en T_M (fuerzas de la superficie).

Si se tiene en cuenta la fuerza del peso, deberá sumarse a la de los músculos. De ser el caso, se considera que la deformación generada en el área mandibular como consecuencia de su propio peso es despreciable ante las deformaciones ocasionadas por las fuerzas de oclusión.

El modelo de Lamé-Hook es considerado para el tensor de tensiones extendido en toda la mandíbula con módulo de Young con un valor en compresión y tracción igual, lo cual es posible porque se supone que el hueso es isótropo, homogéneo y elástico.

Si se considera que la oclusión es un proceso donde no se generan importantes variaciones de la fuerza en el periodo de tiempo estimado para mantener un estado de equilibrio, el proceso se tornará estacionario. También debe considerarse que la mordida se produce de forma lenta, por lo que no existen efectos de inercia que se relacionen con la aceleración.

Tales propiedades definen un problema cuasi estático (cierto nivel de uniformidad instantánea y lento respecto a la velocidad de las partículas), el cual es dado por la ecuación $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i$, donde σ_{ij} es el tensor de tensiones, f_i son los componentes de las fuerzas del cuerpo para cada $i = 1, \dots, 3$.

Si se considera que los efectos de inercia se relacionan con la aceleración, f_i deberá ser escrito como $f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ para cada $i = 1, \dots, 3$ (según la segunda ley de Newton), donde p es la masa de la mandíbula y su formulación es llamada problema dinámico.

Las condiciones de frontera son impuestas en el conjunto T_M para completar el balance de tracción a través de la aplicación de la siguiente ecuación:

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \cdot n_j = g_i, \quad i = 1, \dots, 3,$$

Donde n_j es el vector normal exterior ubicado en un punto genérico con cosenos directos. Las condiciones sobre Γ_C hacen referencia a la tensión cortante nula y la tensión normal no positiva. Debido a que la fuerza de rozamiento es despreciable, las condiciones pueden expresarse por medio de la siguiente ecuación:

$$\sigma_{Ti} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \cdot n_j - \sigma_n n_i = 0, \quad i = 1, \dots, 3,$$

Donde σ_{Ti} es la tensión tangencial, la cual es nula.

A partir de la explicación presentada, surge el siguiente problema (ecuaciones 4, 5, 6 y 7):

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}(u)}{\partial x_j} &= f_i \text{ en } \Omega, i = 1, \dots, 3 \\ u &= 0 \text{ sobre } \Gamma_D, \\ \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(u) n_j &= g_i \text{ en } \Gamma_M, i = 1, \dots, 3 \\ \{u_n = \sum_{i=1}^3 u_i n_i \leq 0, \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_i n_j \leq 0, u_n \sigma_n = 0, \\ \sigma_{Ti} = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i &= 0, \quad i = 1, \dots, 3, \text{ sobre } \Gamma_C \end{aligned}$$

Las tensiones y los desplazamientos dependen del tiempo (t) y se identifica que existen efectos de inercia que se relacionan con la aceleración. Así también, el vector normal a un punto de la superficie es constante en correspondencia al tiempo y solamente varía según su posición. Si se asume que el tronco mandibular pertenece al de una persona sana cuando se inicia el proceso de oclusión; es decir, no existe desplazamiento ni velocidad; entonces, los problemas 4 y 7, para un intervalo de tiempo muy corto, estará dado por (ecuación 8):

Encontrar

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u(x, t)) = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}(x, t) \text{ en } \Omega \times [0, T], i = 1, \dots, 3$$

$$u(x, t) = 0, \text{ en } \Gamma_D \times [0, T]$$

$$\sum_{j=1}^3 \square \sigma_{ij}(u(x, t))n_j(x) = g_i(x, t), \text{ en } \Gamma_M \times [0, T], i = 1, \dots, 3$$

$$\{u_n(x, t) \leq 0, \sigma_n(x, t) \leq 0, u_n(x, t)\sigma_n(x, t) = 0, \text{ en } \Gamma_C \times [0, T],$$

$$\sigma_T(x, t) = 0, \text{ en } \Gamma_C \times [0, T], \quad u(x, 0)$$

$$= 0, \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \text{ en } \Omega$$

Por tanto, para cada $i = 1, \dots, 3$, se pretende efectuar la resolución de la ecuación diferencial parcial.

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u)$$

Se sabe que la ecuación 2:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_v}{(1+v)(1-2v)} \left(\sum_{k=1}^3 \square \epsilon_{kk}(u) \right) \delta_{ij} + \frac{E}{1+v} (\epsilon_{ij}),$$

En donde se reemplaza con los valores respectiva y se obtiene lo siguiente (ecuación 9):

$$\sigma_{ij} = \frac{E_v}{(1+v)(1-2v)} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right) \delta_{ij} + \frac{E}{1+v} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right),$$

Por lo que llamado $\lambda = \frac{E_v}{(1+v)(1-2v)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+v)}$, que se reemplaza en la ecuación 9 y se utiliza la definición de delto de Kronecker, con lo que se obtiene:

$$\sigma_{ij} \left\{ \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \text{ si } i = j, \quad 2\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \text{ si } i \neq j \right.$$

Cuando la expresión σ_{ij} se deriva se llega a lo siguiente:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \left\{ \lambda \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right), \text{ si } j = i, \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right), \text{ si } j \neq i \right.$$

Al arreglar los términos, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) + \lambda \sum_{j \neq i}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}, \text{ si } j \right. \\ \left. = i \quad \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right), \text{ si } j \neq i \right. \end{aligned}$$

De este modo, al agrupar se llega a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \left\{ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \lambda \sum_{j \neq i}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) + \text{ si } j = i, \right. \\ \left. \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right), \text{ si } j \neq i \right. \end{aligned}$$

Al sumar correctamente en función a las derivadas $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, para cada $j = 1, \dots, 3$, se tiene

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \lambda \sum_{j=1, j \neq i}^3 \square \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \sum_{j=1, j \neq i}^3 \square \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \mu \sum_{j=1, j \neq i}^3 \square \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}$$

Se obtiene

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + (\lambda + \mu) \sum_{j=1, j \neq i}^3 \square \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \left(\sum_{j=1, j \neq i}^3 \square \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right)$$

Que equivale a

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \left(\sum_{j=1, j \neq i}^3 \square \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} \right) + \mu \sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Y, por ende, a la siguiente expresión

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$$

Se obtiene la ecuación 10:

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right) + \mu \Delta u_i$$

El cual también puede ser expresado como

$$\sum_{j=1}^3 \square \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} u \right) + \mu \Delta u_i$$

De esta manera, se establece el sistema de ecuaciones

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div} u) + \mu \Delta u_i, \text{ para cada } i = 1, \dots, 3,$$

Que se puede escribir de forma vectorial

$$\rho u_{tt} = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u$$

La cual se lleva a la forma variacional

Encontrar $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $u(0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0) = 0$ en Ω y $u(t) = 0$ en $[0, T]$, Γ_D , tal que para cada $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $v = 0$ en Γ_D se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} u_{tt}(x, t) \cdot v + 2\mu \int_{\Omega} \partial_x u(x, t) : \partial_x u(x) + \lambda \int_{\Omega} \nabla \cdot u(x, t) (\nabla \cdot v(x)) + \int_{TM} \alpha_g (u_{\alpha_g} - u) \cdot v \\ = \int_{\Omega} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Después de plantear el problema, se procede con su solución y el estudio de su existencia, unicidad y convergencia. Para esto, se expande la ecuación 10 y se obtiene la siguiente forma (ecuación 11):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \\ &= \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned}$$

Si se considera que el sistema expuesto puede ser construido con un doble operador diferencial, el cual actúa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (u_1(x, t) u_2(x, t) u_3(x, t)) \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x, t) \right) \\ &\quad \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}(x, t) \right) \end{aligned}$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma.

$$a_{(1,0,0),(1,0,0)} = (\mu + (\mu + \lambda) \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu)$$

Se tiene

$$(\mu + (\mu + \lambda) 0 0 0 \mu 0 0 0 \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} (x, t) \right) \\ = \left((\mu + (\lambda + \mu)) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} (x, t) \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} (x, t) \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} (x, t) \right)$$

El cual es denotado por la ecuación 12:

$$a_{(1,0,0),(1,0,0)} \partial_x^{(1,0,0)} (\partial_x^{(1,0,0)} u(x, t))$$

De la misma manera, se realiza la operación

$$u(x, t) = (u_1(x, t) u_2(x, t) u_3(x, t)) \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} (x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} (x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_2} (x, t) \right) \\ \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} (x, t) \right)$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma.

$$a_{(0,1,0),(0,1,0)} = (\mu 0 0 0 \mu + (\mu + \lambda) 0 0 0 \mu)$$

Se tiene

$$(\mu 0 0 0 \mu + (\mu + \lambda) 0 0 0 \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} (x, t) \right) \\ = \left(\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} (x, t) (\mu + (\lambda + \mu)) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} (x, t) \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} (x, t) \right)$$

El cual es denotado por la ecuación 13:

$$a_{(0,1,0),(0,1,0)} \partial_x^{(0,1,0)} (\partial_x^{(0,1,0)} u(x, t))$$

De manera análoga

$$u(x, t) = (u_1(x, t) u_2(x, t) u_3(x, t)) \partial_x^{(0,1,0)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} (x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_3} (x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_3} (x, t) \right) \\ \partial_x^{(0,1,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} (x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} (x, t) \right)$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(0,0,1),(0,0,1)} = (\mu \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu + (\mu + \lambda))$$

Se tiene

$$\begin{aligned} & (\mu \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu \ 0 \ 0 \ 0 \ \mu + (\mu + \lambda)) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x, t) \right) \\ &= \left((\mu + (\lambda + \mu)) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}(x, t) \mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}(x, t) (\mu + (\lambda + \mu)) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}(x, t) \right) \end{aligned}$$

El cual es denotado por la ecuación 14:

$$a_{(0,0,1),(0,0,1)} \partial_x^{(0,0,1)} (\partial_x^{(0,0,1)} u(x, t))$$

Se continua con un procedimiento parecido

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (u_1(x, t) u_2(x, t) u_3(x, t)) \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x, t) \right) \\ &\partial_x^{(0,1,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \right) \end{aligned}$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(1,0,0),(0,1,0)} = \left(0 \ \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \ 0 \ \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right)$$

Se tiene

$$\begin{aligned} & \left(0 \ \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \ 0 \ \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \ \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \ 0 \right) \end{aligned}$$

El cual es denotado por la ecuación 15:

$$a_{(1,0,0),(0,1,0)} \partial_x^{(0,1,0)} (\partial_x^{(1,0,0)} u(x, t))$$

Se continua con un procedimiento parecido

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (u_1(x, t) u_2(x, t) u_3(x, t)) \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_1}(x, t) \right) \\ &\partial_x^{(0,1,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \right) \end{aligned}$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(1,0,0),(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) & \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El cual es denotado por la ecuación 16:

$$a_{(1,0,0),(0,0,1)} \partial_x^{(0,0,1)} (\partial_x^{(1,0,0)} u(x, t))$$

Se continua con un procedimiento parecido

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (u_1(x, t) u_2(x, t) u_3(x, t)) \partial_x^{(0,1,0)} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x, t) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x, t) & \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x, t) \end{pmatrix} \\ &\quad \partial_x^{(0,0,1)} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) & \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(0,1,0),(0,0,1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) & \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) & \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El cual es denotado por la ecuación 17:

$$a_{(0,1,0),(0,0,1)} \partial_x^{(0,0,1)} (\partial_x^{(0,1,0)} u(x, t))$$

Se observa el siguiente resultado

$$u(x, t) = (u_1(x, t)u_2(x, t)u_3(x, t)) \partial_x^{(0,1,0)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_2}(x, t) \right) \\ \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \right)$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(0,1,0),(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \right) \\ = \left(\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) 0 \right)$$

El cual es denotado por la ecuación 18:

$$a_{(0,1,0),(1,0,0)} \partial_x^{(1,0,0)} (\partial_x^{(0,1,0)} u(x, t))$$

Este último proceso es complementado con

$$u(x, t) = (u_1(x, t)u_2(x, t)u_3(x, t)) \partial_x^{(0,0,1)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x, t) \right) \\ \partial_x^{(1,0,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \right)$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(0,0,1),(1,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x, t) \right) \\ = \left(\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) 0 \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x, t) \right)$$

El cual es denotado por la ecuación 19:

$$a_{(0,0,1),(1,0,0)} \partial_x^{(1,0,0)} (\partial_x^{(0,0,1)} u(x, t))$$

Por último

$$u(x, t) = (u_1(x, t)u_2(x, t)u_3(x, t)) \partial_x^{(0,0,1)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x, t) \frac{\partial u_2}{\partial x_3}(x, t) \frac{\partial u_3}{\partial x_3}(x, t) \right) \\ \partial_x^{(0,1,0)} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \right)$$

Cuando se multiplica el último vector por una matriz se obtiene la forma

$$a_{(0,0,1),(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \right) \\ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) & \frac{1}{2}(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x, t) \end{pmatrix}$$

El cual es denotado por la ecuación 20:

$$a_{(0,0,1),(0,1,0)} \partial_x^{(0,10,0)} (\partial_x^{(0,0,1)} u(x, t))$$

Si el espacio de Sobolev usual de orden 1 de clases de funciones $u \in L^2(\Omega)$ es denotado por $H^1(\Omega)$ junto con sus derivadas parciales en el sentido de distribuciones de orden $|i| \leq 1$, en el que para todo $i = (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}^3$ $|i| = i_1 + i_2 + i_3$ y $\partial_x^i u(x) = \frac{\partial^{i_1} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}}$, para cualquier $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$; por tanto, se pueden sumar las siguientes expresiones (7.12), (7.13), (7.14), (7.15), (7.16), (7.17), (7.18), (7.19) y (7.20), las cuales si se escriben de manera compacta según esta notación, se tiene.

$$\sum_{|i|, |j|=1} a_{ij} \partial_x^i (\partial_x^j u(x, t))$$

El cual es igual a la ecuación 21:

$$\left(\mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} \right) \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) \right)$$

En caso se considere el vector (ecuación 22):

$$\left(\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \right)$$

Se llega a la ecuación 11 y se iguala a las ecuaciones 21 y 22, las cuales, en notación vectorial, pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\rho u_{tt} = (\lambda + \mu) \nabla \text{div} u + \mu \Delta u$$

El cual puede ser expresado del siguiente modo:

$$\partial_t(\rho \partial_t u(x, t)) = \rho \partial_{tt} u(x, t) = \sum_{|i|, |j|=1} a_{ij} \partial_x^i (\partial_x^j u(x, t))$$

Por ello, se llega a la siguiente expresión

$$L_t u(x, t) + L_x u(x, t) = 0, x \in \Omega, t \in (0, T)$$

Donde $L_x : \Omega \rightarrow L^2(\Omega \times (0, T)) \times H^2(0, T)$ es un operador diferencial que está dado por la ecuación 23:

$$L_t u(x, t) = - \sum_{|i|, |j|=1} a_{ij} \partial_x^i (\partial_x^j u(x, t)), x \in \Omega, t \in (0, T)$$

Se considera $a_{ij} \in C^{ij}(\Omega)$ y $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $|i|, |j| \leq 1$, y ∂_x^i es una derivada parcial de orden $|i|$ en correspondencia a x . De igual forma: $L_t = H^2(\Omega \times (0, T)) \rightarrow \Omega \times L^2(0, T)$ es un operador diferencial que está dado por la ecuación 24:

$$L_t u(x, t) = \partial_t(\rho \partial_t u(x, t)) = \rho \partial_{tt} u(x, t), \quad x \in \Omega, t \in (0, T)$$

Con $\rho \in \mathbb{R}$, que es un problema que se encuentra sujeto a las condiciones de frontera de la ecuación 8; por ello, la resolución de dicho problema equivale a lo siguiente (ecuación 25):

$$\begin{aligned} \{L_t u(x, t) + L_x u(x, t) = 0, x \in \Omega, t \in (0, T) \quad (x, 0) = 0, \\ x \in \Omega \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \\ x \in \Omega \quad u(x, t) = g(x, t), x \in \Gamma, t \in (0, T) \end{aligned}$$

Para la resolución de este problema se aplican dos pasos: primero, se resuelve discretizando en función al tiempo; es decir, a la variable t , por lo cual se toma una partición uniforme $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < T_R = T\}$ de $[0, T]$. Segundo paso, para cada $i = 1, \dots, R$, se intenta hallar una solución único al discretizar la posición, la cual depende de i ; es decir, la variable x , lo que se traduce en la toma de una partición de Ω .

4.2. Discretización en tiempo por el método de diferencias finitas

Se considera una partición uniforme $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < T_R = T\}$ de $[0, T]$ de diámetro $s = t_i - t_{i-1}$ para $i = 1, \dots, R$. Sea $i \in \{1, \dots, R\}$ fijo, se aproximan las derivadas de las funciones u por medio de diferencias finitas en cada t_i . Como resultado, se obtiene

$$u_t(x, t_i) \approx \frac{u(x, t_i + s) - u(x, t_i)}{s}$$

Por tanto, para cada $x \in \Omega$ y para cada $i = 1, \dots, R$, el operador diferencial L_t cambia a

$$L_t u(x, t_i) = \frac{\rho \frac{u(x, t_i + 2s) - u(x, t_i + s)}{s} - \rho \frac{u(x, t_i + s) - u(x, t_i)}{s}}{s}$$

Lo que equivale a

$$L_t u(x, t_i) = \rho \frac{u(x, t_i + 2s) - 2u(x, t_i + s) + u(x, t_i)}{s^2}$$

Como resultado, la resolución de la ecuación 25 equivale a resolver i problemas variacionales para $i, \dots, R-1$, (ecuación 26):

$$\begin{aligned} \{L_t u(x, t) + L_x u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \\ x \in \Omega \quad u_t(x, 0) = 0, \\ x \in \Omega \quad u(x, t_i) = g(x, t_i), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

4.3. Discretización en espacio por el método de los elementos finitos

Para cada $i = 1, \dots, R-1$ se considera los operadores diferenciales definidos en $H^2(\Omega \times (0, T))$ por $(L_x^i u)(x) = L_x u(x, t_i)$ y $H^1(\Omega \times (0, T))$ por $(L_x^i u)(x) = L_x u(x, t_i)$. Así también, se define

$$(u, v)_{x,i} = \sum_{|i|, |j| \leq n} (a_{ij}(\cdot) \partial_x^i u(\cdot, t_i), \partial_x^j v(\cdot, t_i))_{0,\Omega} + \rho(\partial_t u(t_i, \cdot), \partial_t v(t_i, \cdot))_{0,\Omega}$$

Y se asume que (ecuación 27):

$$\sum_{|i|, |j|=0} (\xi^i)^t a_{ij} \xi^j \geq 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

Además de que existe $\nu > 0$ (ecuación 28):

$$\sum_{|i|, |j|=1} (\xi^i)^t a_{ij} \xi^j \geq \nu \langle \xi \rangle_2^2, \quad \forall x \in \Omega,$$

Para todo $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^3$ donde $\varepsilon^i = \varepsilon_1^{i1} \varepsilon_2^{i2}$ para todo $i = (i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}^3$.

El operador diferencial es fuertemente elíptico sobre Ω , debido a la ecuación 28.

Por ello, se puede probar de manera fácil que, de acuerdo con las hipótesis (ecuaciones 27 y 28), la forma bilineal define un semiproducto interno sobre $H^1(\Omega \times (0, T))$, cuya seminorma se denota por $|u|_{x,i} = (u, u)_{x,i}^{1/2}$. Se suponen los siguientes enunciados

- Un conjunto ordenado $A^r = \{a_1, \dots, a_m\}$ de $m = m(r) \geq 0$ de puntos diferentes de Ω .
- Un conjunto ordenado $B^N = \{b_1, \dots, b_N\}$ de $N \in \mathbb{N}^*$ puntos diferentes de Ω , ninguno de estos es un vértice geométrico de Ω .
- Un vector de datos $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{R}^m$
- Un espacio dimensional finito X_h constituido por dos particiones a más T_h de Ω , que verificar la longitud de $T_h \leq \rightarrow$ = tanto como $\dim(X_h) \rightarrow +\infty$.
- Para los números reales no negativos h , X_h se pueden espaciar los elementos finitos.

Si Ω es no poligonal, hay una aproximación Ω por Ω_h para cada $h \in H$, por lo que $\lim_{h \rightarrow 0} \Omega \setminus \Omega_h = \emptyset$

Por otro lado, se supone que (ecuación 29):

$$\ker \rho \cap \mathbb{P}_0(\Omega) = \{0\}.$$

Ahora, se señala que σ_h^i es un spline variacional de devolución relacionado con L_x^i, B^N, A^r, β y $\epsilon > 0$, si σ_h^i soluciona el siguiente problema (ecuación 30):

$$\begin{cases} \sigma_h^i \in H_i^{Nh}, \\ \forall v \in H_i^{Nh}, \quad J_i(\sigma_h^i) \leq J_i(v) \end{cases}$$

Donde J_i es el funcional que se define sobre $H^1(\Omega)$ por (ecuación 31):

$$J_i(v) = \langle \rho(v) - \beta \rangle_m^2 + \epsilon(|v|_{x,i}^2)$$

Con ϵ , que es un número real no negativo.

En el siguiente problema y resultado se muestra la unicidad del problema 30 (ecuación), el cual solo admite una solución única del problema variacional y se debe encontrar (ecuación 32):

$$\forall v \in H_0^{Nh}, \quad \langle \rho \sigma_h^i, \rho v \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, v)_{x,i} = \langle \beta, \rho v \rangle_m$$

Para demostrar la ecuación se considera $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, que es dada por

$$a(u, v) = 2(\langle \rho u, \rho v \rangle_m + \epsilon(u, v)_{x,i})$$

La forma $a(.,.)$ es simétrica y bilineal en $H^1(\Omega)$. A partir de las ecuaciones 27 y 28 se tiene que a es coerciva y su continuidad se deduce de la continuidad de ρ y $(.,.)_{x,i}$. Sea $\phi(v) = 2(\langle \beta, \rho v \rangle)$, que claramente es continuo y lineal en $H^1(\Omega)$. Por tanto, al aplicar el teorema $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ se concluye que existe un solo $\sigma \in H_i^{Nh}$, tal que $a(\sigma, \omega - \sigma) \geq \phi(\omega - \sigma)$ para todo $\omega \in H_i^{Nh}$, lo que implica que $a(\sigma, v) \geq \phi(v)$ para todo $v \in H_i^{Nh}$. Debido a que H_0^{Nh} , es un subespacio vectorial, si $v \in H_0^{Nh}$, entonces, $-v \in H_0^{Nh}$, y se sigue que $a(\sigma - v) \geq \phi(-v)$ para cualquier $v \in H_0^{Nh}$. A partir de este resultado se tiene que $a(\sigma - v) \geq \phi(v)$ para cualquier $v \in H_0^{Nh}$. Así también, σ es el mínimo en H_i^{Nh} del funcional $\phi(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \phi(v)$, que es el mínimo de J_i porque $\phi(v) = J_i(v) - \langle \beta \rangle^2 m$. De esta forma, se concluye el resultado.

Por otro lado, existe una única $\sigma_h^i, \lambda \in H_i^{N1} \times \mathbb{R}^B$ tal que para todo (ecuación 33):

$$\langle \rho \sigma_h^i, \rho v \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, v)_{x,i} + \langle \tau v, \lambda \rangle_N = \langle \beta, \rho v \rangle_m$$

Para todo $v \in H_i^{Nh}$ donde σ_h^i es la única solución a la ecuación 30:

$$\langle \rho \sigma_h^i, \rho w \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, w)_{x,i} = \langle \beta, \rho w \rangle_m$$

Esto se demuestra de la siguiente manera: se denotan por $\{w_1, \dots, w_N\}$ las funciones base de X_h relacionadas con el grado de libertad $\{v(b_j)\}_{j=1, \dots, n}$. Para cada $v \in H_i^{Nh}$ sea $\omega = v - \sum_{j=1}^{Nh} v(b_j) \omega_j$. En este aspecto, $\omega \in X_h$ y para cada $k = 1, \dots, N$, $\phi_k(\omega) = \phi_k(v) - \sum_{j=1}^{Nh} v(b_j) \omega_j(b_k) = 0$. Por ende, $\tau \omega = 0$ y, en consecuencia, $\omega \in H_0^{Nh}$. Sea σ_h^i la solución de la ecuación 30. Entonces, para la ecuación 33 se obtiene $\sigma_h^i \in H_i^{Nh}$ y

$$\langle \rho \sigma_h^i, \rho w \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, w)_{x,i} = \langle \beta, \rho w \rangle_m,$$

Y al sustituir y operar por linealidad se tiene

$$\langle \beta, \rho v \rangle_m = \langle \rho \sigma_h^i, \rho v \rangle_m + \sum_{j=1}^N (\langle \beta - \rho \sigma_h^i, \rho w_j \rangle_m - \epsilon(\sigma_h^i, w_j)_{x,i}) v(b_j) + \epsilon(\sigma_h^i, v)_{x,i}$$

Si se denota

$$\lambda = (\langle \beta - \rho \sigma_h^i, \rho w_j \rangle_m - \epsilon(\sigma_h^i, w_j)_{x,i})_{j=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$$

Se concluye lo siguiente:

$$\langle \rho \sigma_h^i, \rho v \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, v)_{x,i} + \langle \lambda, \tau v \rangle_N = \langle \beta, \rho v \rangle_m$$

Y, con ello, se verifica la ecuación 33. Ahora, se supone la existencia de $\lambda, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, por ello, (σ_h^i, λ) y $(\sigma_h^i, \underline{\lambda})$ verifica la ecuación 33. Por tanto,

$$\begin{aligned} \langle \rho \sigma_h^i, \rho v \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, v)_{x,i} + \langle \lambda, \tau v \rangle_N &= \langle \beta, \rho v \rangle_m, \\ \langle \rho \sigma_h^i, \rho v \rangle_m + \epsilon(\sigma_h^i, v)_{x,i} + \langle \underline{\lambda}, \tau v \rangle_N &= \langle \beta, \rho v \rangle_m, \end{aligned}$$

Y, al sustraer se tiene $\langle \lambda - \underline{\lambda}, \tau v \rangle_N = 0, \forall v \in H_i^{Nh}$, a partir del que se deriva $\lambda - \underline{\lambda} = 0$, y como resultado, la unicidad de (σ_h^i, λ) .

4.3.1. Cálculo de la solución discreta en espacio

Se tiene para cada $i = 1, \dots, R$, la expresión spline variacionales discreto σ_h^i . Se escoge h y se considera una partición regular T_h de rectángulos de Ω , tal que los puntos de B^N son nodos de T_h . Se enumeran las funciones base de X_h por $\{w_1, \dots, w_I\}$. Por ello, σ_h^i puede ser expresado como la combinación lineal $\sigma_h^i(x) = \sum_{j=1}^I \gamma_j \omega_j(x)$, y si se calculan las incógnitas γ_j se obtiene la expresión σ_h^i .

Al sustituir en la ecuación 33 se llega a obtener para todo $v \in H_i^{Nh}$,

$$\sum_{j=1}^I \gamma_j (\langle \rho w_j, \rho v \rangle_m + \epsilon(w_j, v)_{x,i}) + \langle \lambda, \tau v \rangle_N = \langle \beta, \rho v \rangle_m$$

Que se encuentra sujeta a las restricciones $\tau(\sum_{j=1}^I \gamma_j \omega_j) = y$, que equivale a

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^I \gamma_j (\langle \rho w_j, \rho w_k \rangle_m + \epsilon(w_j, w_k)_{x,i}) + \langle \lambda, \tau w_k \rangle_N = \\ \langle \beta, \rho w_k \rangle_m, \quad 1 \leq k \leq I, \\ \sum_{j=1}^I \gamma_j (w_j(b_k)) = y_k, \quad 1 \leq k \leq N, \end{cases}$$

El cual es un sistema lineal con $I + N$ ecuaciones y las incógnitas.

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_I, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}.$$

Su forma matriz es

$$\begin{pmatrix} C & D \\ D^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f} \\ y \end{pmatrix},$$

Donde $C = (c_{jk})_{1 \leq j, k \leq I}$, con $c_{jk} = \langle \rho w_j, \rho w_k \rangle_m + \epsilon(w_j, w_k)_{x,i}$,

$D = (d_{jk})_{1 \leq j \leq I, 1 \leq k \leq N}$, con $d_{jk} = w_j(b_k)$,

$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_I)^T$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T$,

$\hat{f} = (\langle \beta, \rho w_1 \rangle_m, \dots, \langle \beta, \rho w_I \rangle_m)^T$, $y = (y_1, \dots, y_N)^T$.

Si se llama

$$A = (w_k(a_j))_{1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq I}, \quad R = ((w_j, w_k)_{x,i})_{1 \leq j, k \leq I}, \quad \text{y } \bar{f} =$$

$$A^T \beta, \text{ entonces } C = A^T A + \epsilon R$$

4.3.2. Convergencia

Se enuncian dos resultados preliminares, los cuales son necesarios para demostrar las propiedades de convergencia. Para esto, se establece la suposición (ecuación 34):

$$\sup_{x \in \Omega} \min_{a \in A^r} \langle x - a \rangle_2 = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{tanto como } r \rightarrow +\infty.$$

La hipótesis anterior (ecuación 34) es una propiedad asintótica sobre la distribución de puntos de A_r en Ω , lo que implica $m(r) > r$.

Sea $\Delta = \frac{(n+2)!}{n!2!}$ la dimensión de P_n con P_n , el cual denota el espacio de funciones polinómicas de grado absoluto n definido en Ω . Por tanto se tiene el siguiente resultado de utilidad.

Proposición 1: Se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto abierto con frontera continua y lipschitziana. Sea $\Delta_0 = \{a_{01}, \dots, a_{\Delta}\}$ de puntos P_{n-1} unisolvente de $\underline{\Omega}$ con $n \geq 1$. Por tanto, existen $n > 0$ tal que, si T_n denota el conjunto de Δ -uplas $G = \{a_{-1}, \dots, a_{-\Delta}\}$ de puntos de $\underline{\Omega}$ que verifican la condición.

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \langle a_j - a_{0j} \rangle_2 \leq \eta,$$

La aplicación

$$[[v]]_n^{\Delta_0} = \left(\sum_{j=1}^{\Delta} |v(a_j)|^2 + |v|_{x,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Definida para todo $\Delta_0 \in T_n$ es una norma sobre $H^n(\Omega)$ que es equivalente de manera uniforme sobre T_n a la norma usual $\|\cdot\|_n$.

Corolario 1: se supone que la ecuación 34 y $n > 1$ se mantienen. Por tanto, existe $\eta > 0$ y para todo $r \in \mathbb{N}$, un subconjunto A_0^r de A^r tal que para todo $r \geq \eta$, la aplicación $[[\cdot]]_r^0$ definida por.

$$[[v]]_r^0 = \left(\sum_{a \in A_0^r} |v(a)|^2 + |v|_{x,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

Es una norma de $H^n(\Omega)$ equivalente de manera uniforme a r , a la norma $\|\cdot\|_n$.

$$\langle a_j - a_j^r \rangle_2 \leq \frac{1}{r}.$$

Demostración: Sea $\Delta_0 = \{a_{01}, \dots, a_{\Delta}\}$ cualquier subconjunto P_{n-1} unisolvente de $\underline{\Omega}$. De la ecuación 34 para todo $r \in \mathbb{N}$ y todo $j = 1, \dots, \Delta$ existe $A_0^r \in A^r$ que verifica

$$\langle a_j - a_j^r \rangle_2 \leq \frac{1}{r}.$$

Sea $A_0^r = \{A_1^r, \dots, A_\Delta^r\}$. Por tanto, es suficiente con aplicar la proposición 1 considerando que para todo $r \geq \eta$, $A_0^r \in T_\eta$ escrito $[[\cdot]]_r^0$ y no $[[\cdot]]_n^{A_0^r}$.

Se supone que $\epsilon = \epsilon(r)$. Sea $u_i = u(x, t_i)$, $x \in \Omega$ la función de desplazamiento en tiempo $t = t_i$. De manera clara, $u_i \in H_i^{Nh}$ y se denota por σ_h^i el spline variacional discreto de evolución asociado a L_x^i, B^N, A^r, pg y ϵ .

Teorema 1: se supone que la ecuación 34 se cumple y (ecuación 35):

$$\epsilon = o(r^p), \quad \text{tanto como } r \rightarrow +\infty.$$

Por tanto,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|\sigma_h^i - u_i\|_n = 0.$$

Demostración: se sabe que $J_i(\sigma_h^i) \leq J_i(u_i)$, lo cual implica (ecuación 36):

$$\langle \rho(\sigma_h^i - u_i) \rangle_m^2 + \epsilon(|\sigma_h^i|_{x,i}^2) \leq \epsilon(|u_i|_{x,i}^2).$$

Como resultado se obtiene (ecuación 37):

$$|\sigma_h^i|_{x,i}^2 \leq |u_i|_{x,i}^2.$$

Sea $\tilde{J}$ el funcional y sea $\tilde{\sigma}$ el mínimo de $\tilde{J}$ en H_i^{Nh} , pues $\tilde{\sigma} - u_i \in H_i$ se tiene que (ecuación 38):

$$(\tilde{\sigma}, \sigma_h^i - u_i)_{x,i} = 0.$$

Al agregar $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})_{x,i}$ en los dos términos de las ecuaciones 37 y 38 se deduce

$$|\sigma_h^i|_{x,i}^2 + (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})_{x,i} \leq |u_i|_{x,i}^2 + 2(\tilde{\sigma}, \sigma_h^i - u_i)_{x,i} + (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})_{x,i}$$

Y se obtiene

$$|\sigma_h^i - \tilde{\sigma}|_{x,i}^2 \leq |u_i - \tilde{\sigma}|_{x,i}^2.$$

Por ende, se concluye (ecuación 39):

$$|\sigma_h^i|_{x,i} \leq 2|u_i - \tilde{\sigma}|_{x,i} + 2|\tilde{\sigma}|_{x,i}.$$

O su equivalente

$$\langle \rho(\sigma_h^i - u_i) \rangle_m^2 \leq \epsilon(|v|_{x,i}^2)$$

Y se usa nuevamente la ecuación 38, del cual se obtiene

$$\langle \rho(\sigma_h^i - u_i) \rangle_m^2 \leq \epsilon(|u_i|_{x,i}^2 + 2(\tilde{\sigma}, \sigma_h^i - u_i)_{x,i})$$

O (ecuación 40):

$$\langle \rho(\sigma_h^i - u_i) \rangle_m^2 \leq \epsilon(|u_i|_{x,i}^2 - 2(\tilde{\sigma}, u_i)_{x,i} + 2(\tilde{\sigma}, \sigma_h^i)_{x,i}).$$

Se conoce que

$$2(\tilde{\sigma}, \sigma_h^i)_{x,i} \leq |\tilde{\sigma}|_{x,i}^2 + |\sigma_h^i|_{x,i}^2.$$

Por tanto, por la ecuación 40 se colige

$$\langle \rho(\sigma_h^i - u_i) \rangle_m^2 \leq \epsilon(|u_i|_{x,i}^2 - 2(\tilde{\sigma}, u_i)_{x,i} + |\tilde{\sigma}|_{x,i}^2 + |\sigma_h^i|_{x,i}^2)$$

Sin embargo, el último término en el lado derecho de la desigualdad se acota por la ecuación 39 y u_i y $\tilde{\sigma}$ son funciones fijadas, lo que implica (ecuación 42):

$$\langle \rho(\sigma_h^i - u_i) \rangle_m^2 = O(\epsilon).$$

Sea $\Delta_0 = \{a_{01}, \dots, a_{\Delta}\}$ subconjunto P_{n-1} unisolvente de puntos de Ω y sea η la constante de la proposición 1. Cabe precisar que existe $\eta' \in (0, \eta]$ tal que

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \overline{B}(a_{0j}, \eta') \subset \overline{\Omega}.$$

A partir de la ecuación 34 se tiene que existe $C > 0$, tal que

$$\forall r \in \mathbb{N}, r > \frac{C}{\eta'}, \quad \forall j = 1, \dots, \Delta, \\ \overline{B}\left(a_{0j}, \eta' - \frac{C}{r}\right) \subset \bigcup_{a \in A^r \cap \overline{B}(t_{0j}, \eta')} \overline{B}\left(a, \frac{C}{r}\right).$$

Si $N_j = \text{card}(A^r \cap \overline{B}(a_{0j}, \eta'))$ se sigue

$$\forall r \in \mathbb{N}, r > \frac{C}{\eta'}, \forall j = 1, \dots, \Delta, \exists C_1 > 0, \quad \left(\eta' - \frac{C}{r}\right)^p \leq \frac{C_1 N_j}{r^2}$$

Y, en consecuencia, para cualquier $r_0 > \frac{C}{\eta^l}$ se tiene (ecuación 43):

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \dots, \Delta, \exists C_2 > 0, \quad \mathcal{N}_j \geq C_2 \left(\eta' - \frac{C}{r_0} \right)^{2r^2}$$

Conjuntamente, a partir de las ecuaciones 34 y 42 se colige

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad \sum_{a \in A^r \cap \overline{B}(t_{0j}, \eta')} |(\sigma_h^i - u_i)(a)|^2 = o(r^2), r \rightarrow +\infty$$

Si $a_j^r \in A^r \cap \overline{B}(a_{0j}, \eta')$ tal que

$$|(\sigma_h^i - u_i)(a_j^r)| = \min_{a \in A^r \cap \overline{B}(t_{0j}, \eta')} |(\sigma_h^i - u_i)(a)|, \quad r \rightarrow +\infty$$

Se colige a partir de las ecuaciones 43 y 44 que (ecuación 45):

$$\forall j = 1, \dots, \Delta, \quad |(\sigma_h^i - u_i)(a)| = o(1), r \rightarrow +\infty.$$

Ahora, se denota por Δ^r el conjunto $\{A_1^r, \dots, A_\Delta^r\}$. Al aplicar la proposición 7.5.6 a $\Delta = \Delta^r$ para r lo suficientemente cerca a finito, se llega de las ecuaciones 39 y 45, y el corolario 1 que

$$\exists C > 0, \exists \gamma > 0, \forall r \in \mathbb{N}, \quad r \geq \gamma, \quad \|\sigma_h^i\|_n \leq C.$$

Esto significa que la familia (σ_h^i) está acotada en $H^n(\Omega)$. Por tanto, existe una subsucesión $(\sigma_{\epsilon_l}^{T_l})_{l \in \mathbb{N}}$ que ha sido extraída de esta familia, con $\epsilon = \epsilon(r_l)$, y un elemento u_i^* de $H^n(\Omega)$, tal que

$$u_i^* = \lim_{l \rightarrow +\infty} \sigma_{\epsilon_l}^{r_l} \quad \text{débilmente en } H^n(\Omega).$$

CAPÍTULO V

PROGRAMACIÓN DEL PROBLEMA DE LOS TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES

Con el avance de la ciencia y los estudios científicos se ha identificado que existen problemas sobre la oclusión, específicamente, un problema tridimensional en el que se incluyen los cóndilos bilaterales, la mandíbula y la dentadura inferior. La observación de esta problemática ha conllevado a que se realicen investigaciones para resolverlo y garantizar un tratamiento adecuado al paciente, puesto que los trastornos temporomandibulares son alteraciones bucales que impiden que un sujeto pueda tener un estilo de vida apropiado al generarle ciertos signos y síntomas, como molestias al morder o masticar, dolor facial, dolor en los músculos mandibulares, chasquidos o ruidos, entre otros.

Es así que en esta investigación se introducen las propiedades físicas de la mandíbula, con el fin de conocer su estructura y se consideran sus aspectos biomecánicos, fisiológicos y anatómicos para aplicar los métodos de formulación variacional. Conjuntamente, se realizan simulaciones numéricas con el propósito de reconstruir, mediante la aplicación de métodos variacionales con malla, el modelo matemático de la oclusión de un paciente diagnosticado con TTM, y el análisis de fuerzas en la ATM. Por último, se analizaron los desplazamientos y las deformaciones, los cuales se comparan con investigaciones anteriores para concluir si el modelo matemático que se plantea puede ser de gran utilidad para futuros estudios de enfermedades crónico-degenerativas.

Objetivo

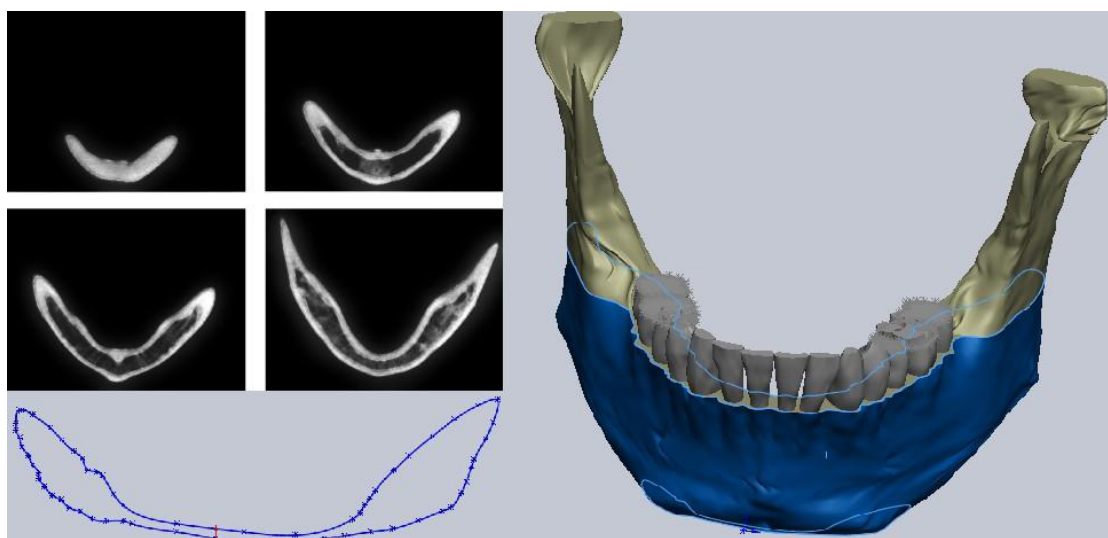
Aproximar por métodos variacionales con malla (elementos finitos) la solución de un problema tridimensional de oclusión, que incluye como elementos constitutivos los cóndilos bilaterales, la mandíbula y la dentadura inferior.

Análisis e interpretación de resultados

a. Consideraciones para la simulación biomecánica

El nivel del diseño del modelo mandibular es realizado por medio de la obtención de tomografías y la reconstrucción posterior a través de curvas y superficies. Este proceso es efectuado utilizando MATLAB y SolidWorks. El resultado se observa en la Figura 4.

Figura 4: *Adquisición de tomografía y reconstrucción mandibular*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

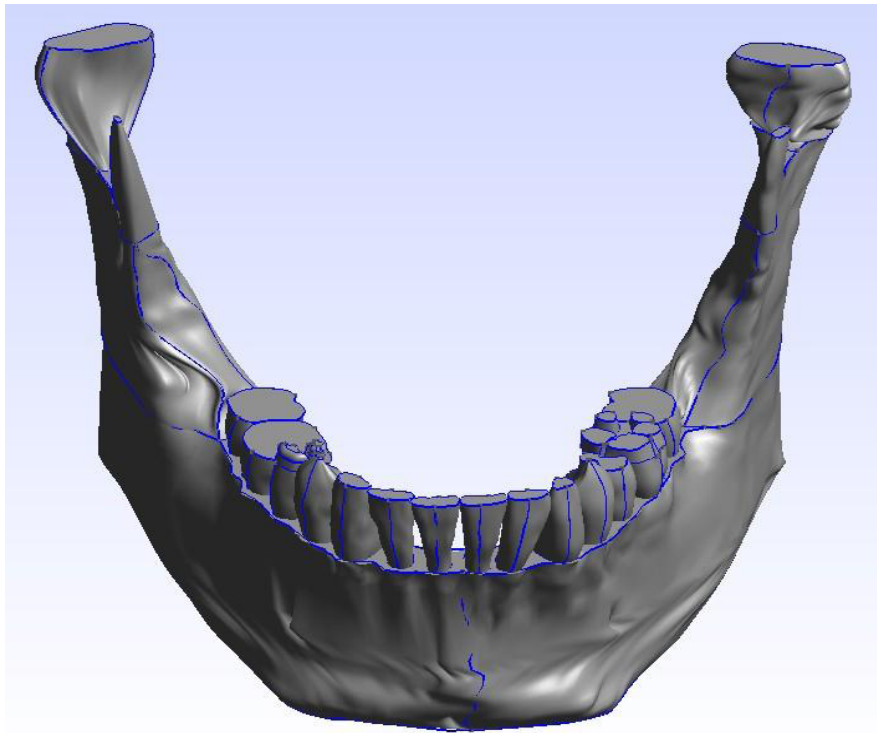
El modelo CAD de mandíbula fue realizado a partir de partes diferenciadas de la mandíbula, las cuales fueron construidas con curvas B-Spline considerando 11 factores (F_i , $i \in \{1, \dots, 11\}$), los cuales se obtuvieron mediante el análisis factorial, como se describe en la Tabla 9. El modelo construido se presenta en la Figura 5.

Tabla 9: Superficies mandibulares reconstruidas y su relación con los factores de TTM asociados; NR, cardinalidad en programa CAD utilizado (*: Primera molar)

NR	Sección mandibular	Lateralidad	Posición	Factor(es) afectante(s)
2	Cuerpo de la mandíbula			F3, F11
3	Rama de la mandíbula	Izquierda		F2
4	Cóndilo	Izquierdo		F1, F2, F3, F4, F6, F7, F10
5	Apófisis coronoides	Izquierda		F9
6	Rama de la mandíbula	Derecha		F2
8	Cóndilo	Derecho		F1, F2, F3, F4, F6, F7, F10
10	Apófisis coronoides	Derecha		F9
11	Incisivo central	Derecho	Inferior	F5, F9
12	Incisivo central	Izquierdo	Inferior	F5, F9
13	Incisivo lateral	Izquierdo	Inferior	F5, F9
15	Incisivo lateral	Derecho	Inferior	F5, F9
16	Canino	Derecho	Inferior	F2, F9
17	Canino	Izquierdo	Inferior	F2, F9
22	Primera premolar	Derecha	Inferior	F9
24	Primera premolar	Izquierda	Inferior	F9
25	Segunda premolar	Izquierda	Inferior	F9
27	Segunda premolar	Derecha	Inferior	F9
29	Primera molar	Izquierda	Inferior	F9
30	Cúspide mesio lingual (*)	Izquierda	Inferior	F9
33	Cúspide vestibular (*)	Izquierda	Inferior	F9
34	Cúspide mesio vestibular (*)	Izquierda	Inferior	F9
35	Cúspide disto vestibular (*)	Izquierda	Inferior	F9
36	Cúspide disto lingual (*)	Izquierda	Inferior	F9
37	Primera molar	Derecha	Inferior	F9
38	Segunda molar	Izquierda	Inferior	F8, F9
40	Segunda molar	Derecha	Inferior	F8, F9

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Figura 5: *Reconstrucción de superficies temporomandibulares de la Tabla 4*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

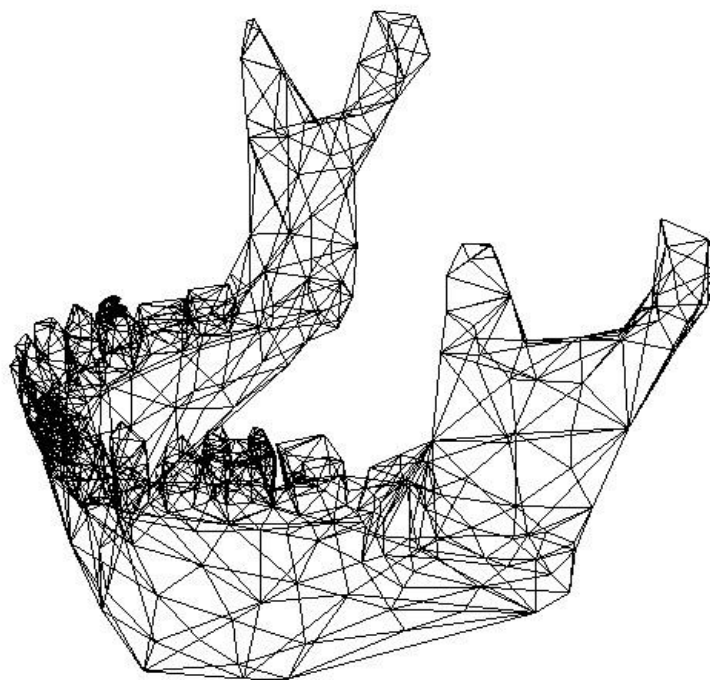
Para la simulación numérica, se tiene en cuenta un individuo arbitrario, que luego de que pasado el análisis clínico mediante el uso del sistema H y la observación de los resultados en el formulario que corresponde al índice de Friction, que ha sido identificado con algún trastorno temporomandibular. La persona que padece este tipo de trastorno es considerada un sujeto de prueba, por lo cual se procede a analizar las características del trastorno que padece empleando los registros adquiridos durante el diagnóstico previo del sistema H, partiendo de la base de datos asociada.

Mediante el sistema H se procesa la información de registro. Así también, se aplica la lógica difusa con el objetivo de determinar la pertenencia de todos los factores que integran el análisis factorial efectuado con la base de datos de la muestra e interpretación odontológica. La formulación matemática del modelo en derivadas parciales contempla un análisis de desplazamientos y tensiones que corresponden a tales factores.

Para la modelización biomecánica de los músculos involucrados y la mandíbula se utiliza el prototipo CAD construido; así también, se implementan las propiedades físicas que poseen y las fuerzas con sus componentes difusas sobre los huesos y los músculos en el sistema MATLAB. Para esto, se utiliza el software FreeFem++, puesto que es útil para la realización de estudios por elementos finitos (tipo Lagrange P1 y P2) en vista que presenta las condiciones necesarias para implementar la formulación variacional. Para esto se efectúa una conexión entre los dos *softwares*.

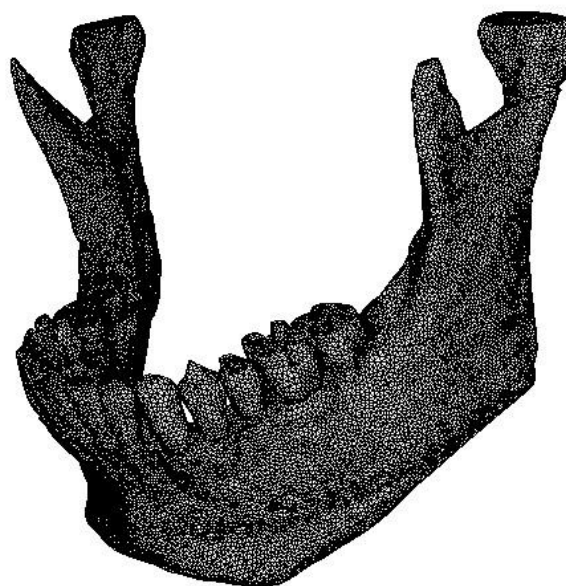
El modelo original desarrollado abarca 40368 triángulos, 554752 tetraedros, 2352 aristas y 102821 vértices, tal como se observa en la Figura 6. Es preciso destacar que, para la simulación numérica, se utilizaron solamente 2523 triángulos, 8668 tetraedros, 588 aristas y 2095 vértices, lo cual se aprecia en la Figura 7.

Figura 6: *Mallado del modelo mandibular original compuesto por 40368 triángulos, 554752 tetraedros, 2352 aristas y 102821 vértices*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Figura 7: *Mallado del modelo mandibular para simulación numérica compuesto por 2523 triángulos, 8668 tetraedros, 588 aristas y 2095 vértices*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Para simplificar el estudio biomecánico, se plantean algunas hipótesis sobre la anatomía de la mandíbula. A pesar de la naturaleza anisotrópica de los materiales que conforman la mandíbula y los dientes, estos se pueden asumir sin pérdida de generalidad como isotrópicos y homogéneos. Conjuntamente, cada uno de los materiales que se emplean son considerados elásticos. Las propiedades elásticas del disco articular del área mandibular y las propiedades biomecánicas de los huesos cortical y poroso, se detallan en la Tabla 10.

Tabla 10: *Propiedades mecánicas de varios componentes de la ATM*

Material	Módulo de Young (MPa)	Radio de Poisson
Hueso cortical	1.37×10^4	0.30
Hueso poroso	7.93×10^3	0.30
Disco articular	4.41×10	0.4

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Según el Principio de San Venant (equivalencia estática implica equivalencia elástica), el radio de Poisson de los dientes y la mandíbula, y el módulo de elasticidad son, por simplicidad, definidos por medio de las medias que se toman entre los valores que se obtiene clínicamente para los huesos poroso y cortical que, de acuerdo con la Tabla 10. vienen dados por 0.30 y $1.1 \times 10^4 \text{MPa}$, correspondientemente. Estos valores se emplean como referencia para proceder con la resolución numérica.

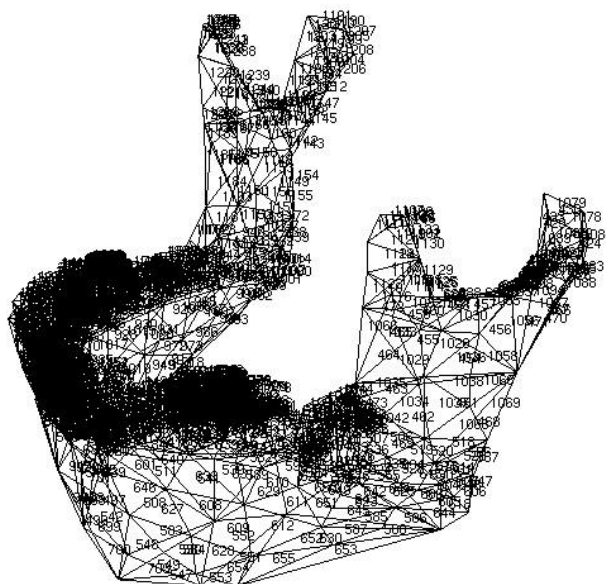
a. Simulación biomecánica

Según algunos estudios en odontología, como Korióth (1992), el proceso de oclusión pretende ser abordado de forma apropiada, por lo cual dicho proceso es estudiado bajo cinco tipos de mordida, los cuales son los siguientes: contacto molar unilateral derecho (RMOL), contacto incisal (INC), función de grupo izquierdo con contacto de equilibrio en la segunda molar (LGF+B), función de grupo izquierdo (LGF) y posición intercuspidal (ICP). En los dos primeros tipos (RMOL e INC) a la primera molar derecha y los cuatro incisivos no se les permite desplazarse verticalmente, en el tipo LGF+B, los dientes restringidos de movimiento (sujeción vertical) son a partir de los caninos hasta las terceras molares en el lado izquierdo más la segunda molar en el lado derecho (equilibrio); en el tipo LGF, son de los caninos izquierdos hasta las últimas molares; en el tipo ICP son todos los dientes desde los caninos hasta las terceras molares bilateralmente (si la tercera molar derecha no ha erupcionado totalmente, se excluye).

Para cumplir los objetivos de este estudio, la simulación del proceso de oclusión de un paciente con TTM fue realizada solo con uno de los tipos de mordida expuestos: contacto unimolar (RMOL), con el cual se efectuó la validación. No obstante, el código implementado en FreeFem++ y MATLAB contempla los cinco tipos de mordidas. Las condiciones fueron elegidas con el propósito de simular las condiciones de mordida y predecir la interacción de fuerzas en el sistema masticatorio.

Para cumplir este objetivo, se realiza una modelización en la que se aplican determinadas condiciones de contorno. La modelización de la estructura de la ATM se realiza al combinar las propiedades del hueso cortical y fibrocartílago para la superficie temporal y el disco articular, respectivamente. Con esto, se analiza la distribución de tensiones sobre los cóndilos no restringidos y se representa el efecto de amortiguamiento del disco articular contra el hueso temporal rígido. La modelización de los contactos interdentes es realizada al insertar ciertos nodos adecuados entre cada par de piezas dentales. Con el fin de reflejar la transmisión de fuerza entre los contactos, se programan los espacios interdentes con la transmisión de fuerza nula o no, únicamente en las líneas de conexión entre los dientes, considerando una apropiada numeración sobre las fronteras que se pretender tener en cuenta para la imposición de condiciones de contorno. Esto se observa en la Figura 8.

Figura 8: *Fronteras de la mandíbula diferenciadas de acuerdo con su numeración en FreeFem++.*

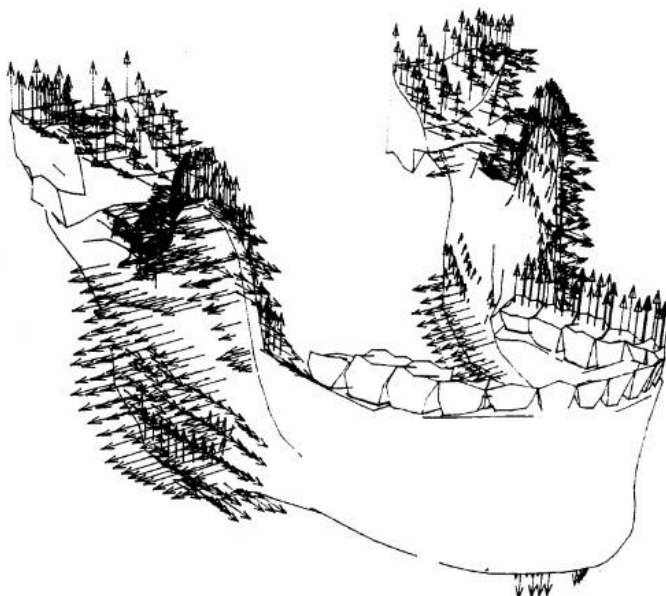


Nota. Tomado de Hananel (2015)

Para la simulación de fuerzas musculares sobre áreas fijadas, el cuerpo mandibular fue cargado con diversos vectores de fuerza. Conjuntamente, se

procede con la modelización de los grupos de vectores paralelos que simulan músculos masticatorios unidos directamente al hueso. Esto se aprecia en la Figura 9.

Figura 9: *Grupos de vectores paralelos simulando músculos masticatorios unidos directamente al hueso*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

A pesar de que los músculos pterigoideo medial y masetero no se representan como uno solo, su independencia aparente puede ser no real. Las direcciones de los elementos ortogonales de los músculos son mostradas como vectores unitarios de vectores de fijación muscular. Las coordenadas tridimensionales de los lugares donde se unen los músculos mandibulares y maxilares derivan de las investigaciones de Nelson (1986), Nelson y Hannam (1982), y Nelson y Hannam (1983), los cuales tiene como base las medidas aplicadas en cinco cráneos humanos. Cada músculo se representa con sus extremos de coordenadas (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) . La distancia intermuscular (de estos es obtenido de manera habitual de la siguiente manera:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

La orientación de cada músculo se define en forma de cosenos directores, los cual se observa en la Tabla 11.

$$\cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \cos \beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \cos \delta = \frac{yz_2 - yz_1}{d}$$

Tabla 11: Direcciones de las componentes ortogonales musculares derivadas como vectores unitarios (cosenos directores) de fijación muscular

	Lado Derecho			Lado Izquierdo		
	cosa	cosβ	cosδ	cosa	cosβ	cosδ
Masetero superior	-0.207	0.884	0.419	0.207	0.884	0.419
Masetero profundo	-0.546	0.758	-0.358	0.546	0.758	-0.358
Pterigoideo medial	0.486	0.791	0.373	-0.486	0.791	0.373
Temporal anterior	-0.149	0.988	0.044	0.149	0.988	0.044
Temporal medio	-0.222	0.837	-0.500	0.222	0.837	-0.500
Temporal posterior	-0.208	0.474	-0.855	0.208	0.474	-0.855
Pterigoideo inferior	0.630	-0.174	0.757	-0.630	-0.174	0.757
Pterigoideo superior	0.761	0.074	0.645	-0.761	0.074	0.645
Dig'ástrico anterior	-0.244	-0.237	-0.940	0.244	-0.237	-0.940

Nota. Tomado de Hananel (2015)

La magnitud que resulta de la fuerza muscular (M_{ir}) de cada muscular durante el proceso de contracción isométrica (no se modifica la longitud pero sí hay tensión) se establece por el siguiente producto (Pruim *et al.*, 1980; Pruim, 1978):

$$[X_{M_i} \cdot K] \cdot EMG_{M_i} = M_{ir}$$

Donde:

X_{M_i} = área de la sección transversal del músculo M_i en centímetros

K = constante para el músculo esquelético. Se expresa en N/cm^2 .

EMG_{M_i} = valor normalizado o radio. Distancia de la contracción muscular relativa a su respuesta máxima para cualquier tarea.

El producto $[X_{Mi} K]$ es denominado factor de peso para el músculo M_i y el valor EM_{GM_i} , factor de escala.

El momento M_{ir} es obtenido cuando se multiplica el factor de peso de un músculo concreto por su factor de escala. Los componentes de fuerza del vector ortogonal son generados por el producto de M_{ir} y su vector unitario correspondiente. Estos productos se proporcionan después entre los nodos que corresponden a la unión muscular, como se observa en la Tabla 12.

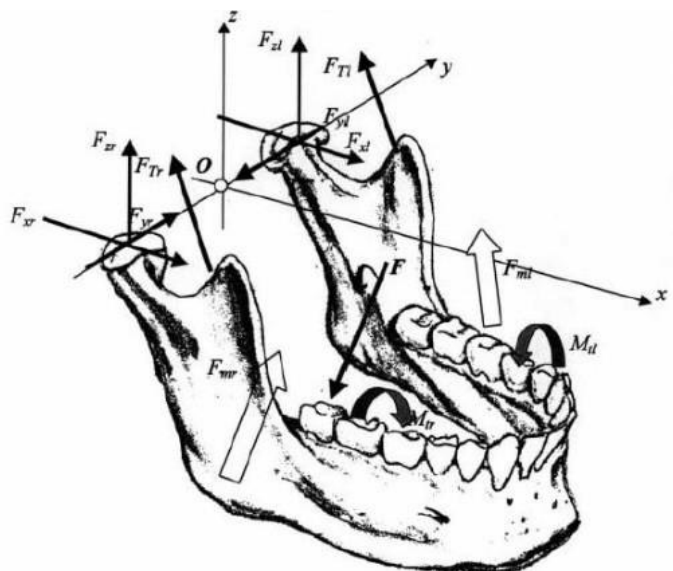
Tabla 12: Factores de escala y de peso asignados a los músculos masticatorios para 5 tareas de mordida

	Factor de peso [Newton]	Factor de escala									
		ICP		LGF		LGF+B		ICN		RMOL	
		Der	Izq	Der	Izq	Der	Izq	Der	Izq	Der	Izq
Masetero superior	190.4	1.00	1.00	0.27	0.18	0.26	0.12	0.40	0.40	0.72	0.60
Masetero inferior	81.6	1.00	1.00	0.26	0.36	0.26	0.36	0.26	0.26	0.72	0.60
Pterigoideo medial	174.8	0.76	0.76	0.76	0.07	0.73	0.09	0.78	0.78	0.84	0.60
Temporal anterior	158.0	0.98	0.98	0.07	0.66	0.23	0.54	0.08	0.08	0.73	0.58
Temporal medio	95.6	0.96	0.96	0.06	0.64	0.12	0.57	0.06	0.06	0.66	0.67
Temporal posterior	75.6	0.94	0.94	0.06	0.62	0.08	0.59	0.04	0.04	0.59	0.39
Pterigoideo inferior	66.9	0.27	0.27	0.14	0.59			0.71	0.71	0.30	0.65
Pterigoideo superior	28.7	0.59	0.59	0.08	0.20			0.50	0.50		
Digástrico anterior	40.0	0.28	0.28	0.38	0.51			0.50	0.50		

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Respecto a los nodos que constituyen los músculos, los componentes de sus respectivas fuerzas se combinan de modo vectorial. En la Figura 10 se observan los componentes del modelo de fuerzas que se ejercen en la oclusión.

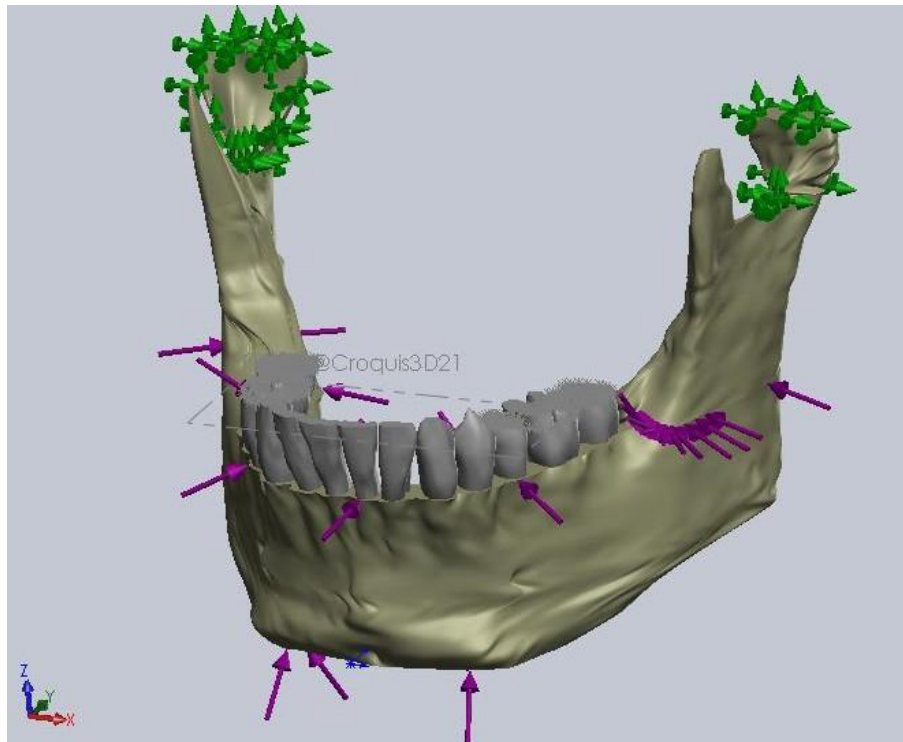
Figura 10: *Vista lateral frontal de la mecánica de fuerzas producidas en oclusión*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Para cada tarea oclusal, el modelo está limitado de movimiento en los tercios oclusales centrales y laterales de la primera molar inferior derecha. Las restricciones impuestas actúan de forma perpendicular al plano oclusal (dirección Y) en las cúspides de soporte inferior, por lo que hay libertad para que se desplace en el plano horizontal. Las restricciones tridimensionales se ubican de modo bilateral en las superficies corticales endóseas de cada hueso temporal. Las restricciones impuestas se caracterizan por imitar las mordidas estáticas fijadas en el área mandibular, como se aprecia en la Figura 11. Por esta razón, se realiza la simulación de cinco mordidas en la mandíbula con los cóndilos centrados en la fosa glenoidea.

Figura 11: *Vista lateral frontal izquierda mostrando condiciones de frontera impuestas en el modelo de TTM*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

En las Tablas 13, 14, 15, 16 y 17, la cantidad de nodos refleja el número de vectores que se aplican en cada músculo mandibular. Las cargas musculares (en Newton) y sus direcciones son representadas por las coordenadas x , y y z . Estas se referencian en un sistema global de coordenadas cartesianas: yz es el plano lateral usual, xz es el plano horizontal (mandibular) y xy es el plano frontal.

Tabla 13: Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo ICP

	NODOS		ICP					
	Der	Izq	Derecha			Izquierda		
			X	Y	Z	X	Y	Z
Masetero superior	59	59	-0.668	2.853	1.351	0.668	2.853	1.351
Masetero profundo	38	38	-1.172	1.627	-0.768	1.172	1.627	-0.768
Pterigoideo medial	44	43	1.466	2.388	1.125	-1.500	2.443	1.151
Temporal anterior	43	40	-0.538	3.557	0.159	0.578	3.824	0.171
Temporal medio	18	18	-1.131	4.269	-2.549	1.131	4.269	-2.549
Temporal posterior	15	15	-0.987	2.247	-4.052	0.987	2.247	-4.052
Pterigoideo inferior	5	5	2.276	-0.629	2.734	-2.276	-0.629	2.734
Pterigoideo superior	4	4	3.221	0.312	2.730	-3.221	0.312	2.730
Digástrico anterior	8	8	-0.516	-0.502	-1.990	0.516	-0.502	-1.990
Borde inferior	15	15	1.674	18.228	8.615	-1.674	18.228	8.615

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Tabla 14 : Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo LGF

	NODOS		LGF					
	Der	Izq	Derecha			Izquierda		
			X	Y	Z	X	Y	Z
Masetero superior	59	59	-0.180	0.770	0.365	0.120	0.514	0.243
Masetero profundo	38	38	-0.305	0.423	-0.200	0.422	0.586	-0.276
Pterigoideo medial	44	43	1.466	2.388	1.125	-0.138	0.225	0.106
Temporal anterior	43	40	-0.038	0.254	0.011	0.389	2.575	0.115
Temporal medio	18	18	-0.071	0.267	-0.159	0.754	2.846	-1.699
Temporal posterior	15	15	-0.063	0.143	-0.259	0.651	1.482	-2.673
Pterigoideo inferior	5	5	1.180	-0.326	1.418	-4.973	-1.375	5.975
Pterigoideo superior	4	4	0.437	0.042	0.370	-1.092	0.106	0.925
Digástrico anterior	8	8	-0.463	-0.451	-1.787	0.622	-0.605	-2.398
Borde inferior	15	15	3.591	10.035	4.734	0.077	2.665	1.261

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Tabla 15: Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo LGF+B

	NODOS		LGF+B					
	Der	Izq	Derecha			Izquierda		
			X	Y	Z	X	Y	Z
Masetero superior	59	59	-0.174	0.742	0.351	0.080	0.342	0.162
Masetero profundo	38	38	-0.305	0.423	-0.200	0.422	0.586	-0.276
Pterigoideo medial	44	43	1.408	2.294	1.080	-0.178	0.289	0.136
Temporal anterior	43	40	-0.126	0.835	0.037	0.318	2.107	0.094
Temporal medio	18	18	-1.141	0.534	-0.319	0.671	2.535	-1.513
Temporal posterior	15	15	-0.084	0.191	-0.345	0.620	1.410	-2.544
Pterigoideo inferior	5	5						
Pterigoideo superior	4	4						
Digástrico anterior	8	8						
Borde inferior	15	15	3.448	9.646	4.551	-0.194	2.176	1.029

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Tabla 16: Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo INC

	NODOS		INC					
	Der	Izq	Derecha			Izquierda		
			X	Y	Z	X	Y	Z
Masetero superior	59	59	-0.267	1.141	0.541	0.267	1.141	0.541
Masetero profundo	38	38	-0.305	0.423	-0.200	0.305	0.423	-0.200
Pterigoideo medial	44	43	1.505	2.451	1.154	-1.540	2.508	1.181
Temporal anterior	43	40	-0.044	0.290	0.013	0.047	0.312	0.014
Temporal medio	18	18	-0.071	0.267	-0.159	0.071	0.267	-0.159
Temporal posterior	15	15	-0.042	0.096	-0.172	0.042	0.096	-0.172
Pterigoideo inferior	5	5	5.984	-1.655	7.190	-5.984	-1.655	7.190
Pterigoideo superior	4	4	2.729	0.264	2.313	-2.729	0.264	2.313
Digástrico anterior	8	8	-0.610	-0.593	-2.351	0.610	-0.593	-2.351
Borde inferior	15	15	3.363	11.678	5.512	-3.363	11.678	5.512

Nota. Tomado de Hananel (2015)

Tabla 17: Número y magnitudes de cargas musculares utilizadas en el modelo de mordida por elementos finitos del tipo RMOL

	NODOS		RMOL					
	Der	Izq	Derecha			Izquierda		
			X	Y	Z	X	Y	Z
Masetero superior	59	59	-0.481	2.054	0.973	0.401	1.712	0.811
Masetero profundo	38	38	-0.844	1.172	-0.553	0.703	0.976	-0.461
Pterigoideo medial	44	43	1.620	2.639	1.243	-1.184	1.929	0.909
Temporal anterior	43	40	-0.400	2.650	0.119	0.342	2.263	0.101
Temporal medio	18	18	-0.777	2.935	-1.752	0.789	2.979	-1.779
Temporal posterior	15	15	-0.620	1.410	-2.544	0.410	0.932	-1.681
Pterigoideo inferior	5	5	2.529	-0.699	3.038	-5.478	-1.515	6.582
Pterigoideo superior	4	4						
Digástrico anterior	8	8						
Borde inferior	15	15	2.862	15.823	7.473	-1.819	12.264	5.794

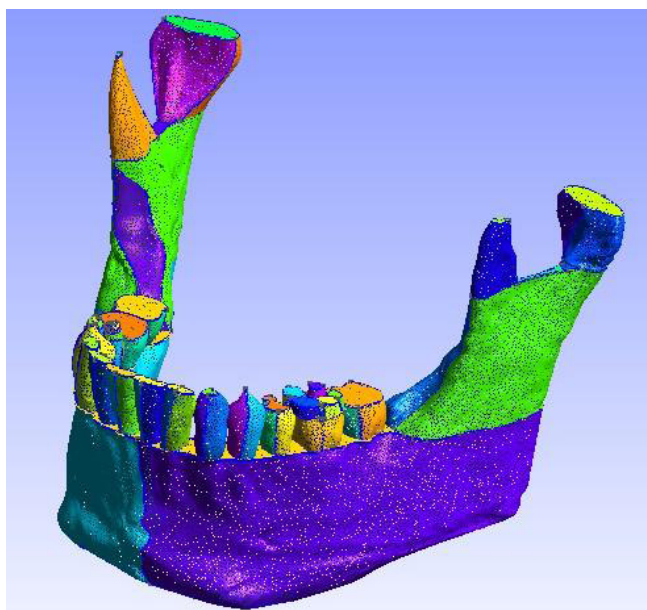
Nota. Tomado de Hananel (2015)

Para la simulación, se ha asumido que el sujeto de prueba es un adulto joven y posee solo 14 dientes en lugar de 16. Esto se debe a que se prefiere suponer la hipótesis más acertada respecto a la cantidad de dientes que brotan uniformemente en una persona arbitraria, debido a que los dientes del juicio o las terceras molares no erupcionan en algunas personas y, en la mayoría de los casos, estos dientes generan inestabilidad al análisis los TTM porque, en ciertas ocasiones, producen dolor en el paciente, lo que pueden conllevar a la generación de una variable del tipo psicológico. Es preciso destacar que en esta investigación la variable del tipo psicológico no es abordada. En cualquier caso, los 16 dientes se pueden considerar sin problema alguno tomando dos reconstrucciones más sobre la mandíbula, lo cual se implementa en SolidWorks.

Como supuesto natural es necesario fijar una sujeción para que el modelo mandibular comprenda dos regiones: parte móvil y parte fija. La parte fija es la

superficie que se utiliza como sujeción relativa de un sistema de referencia que, en la presente investigación, es el sistema estomatognático. Es de conocimiento que la mandíbula es el único hueso del cuerpo humano que puede ser movido por una fuerza interior, el cual se produce en función a un punto fijo (cóndilo), que se considera en la modelización. Las superficies condilares, situadas en las zonas periféricas, están delimitadas según se observa en la Figura 12.

Figura 12: *Sujeciones en el modelo mandibular: regiones fijas y móviles*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Cualquier otra superficie de la mandíbula puede ser considerada como una sujeción. La configuración de las cargas se realiza por medio de la conexión efectuada entre FreeFem++ y MATLAB, donde se integran las fuerzas externas sobre el cuerpo mandibular. Se debe considerar que las fuerzas de masticación que la molares ejercen son 248 N aproximadamente. Este valor uniforme es tomado en cuenta en toda la mandíbula porque el proceso de oclusión es un proceso que suele ser realizado con las premolares o las molares, pero no con los caninos o los incisivos.

Para estudiar la evolución del trastorno temporomandibular se aplicó el método de diferencias finitas por medio de un esquema implícito efectuado en

FreeFem++ según la formulación variacional. De acuerdo con el dominio considerado y sus condiciones de frontera, son la zona superficial de contacto, las segundas molares, los cóndilos bilaterales y los lados de no trabajo, los cuales deben tener especial interés en el estudio; por esto, se resta importancia a las características de fluido del ligamento periodontal y la ATM, que no son considerados en esta investigación.

Para simular el movimiento de oclusión efectuado por el paciente con TTM se necesita la pertenencia μ de los 11 factores involucrados. Para esto, se utiliza el sistema H, pues es útil para encontrar los valores relacionados con el cálculo de estos. Se observa que solamente se logran obtener valor 1 no nulos relativos a los factores F3, F4, F5, F7, F8, F9, en este caso, los que constituyen las gi que se necesita para implementar el modelo dinámico.

De esta manera y para simular el impacto, se supone una densidad de fuerza exponencialmente creciente durante el intervalo $[0, T]$ (función de soporte compacto), la cual se define del siguiente modo:

$$g(x, t) = \begin{cases} 2 \left(\sum_{i=1, i \neq j}^{11} \mu_i \right) \mu_j e^{-\frac{t-t_0}{t_0}} & \text{si } t > t_0 \\ g_0 & \text{si } 0 \leq t \leq t_0 \end{cases}$$

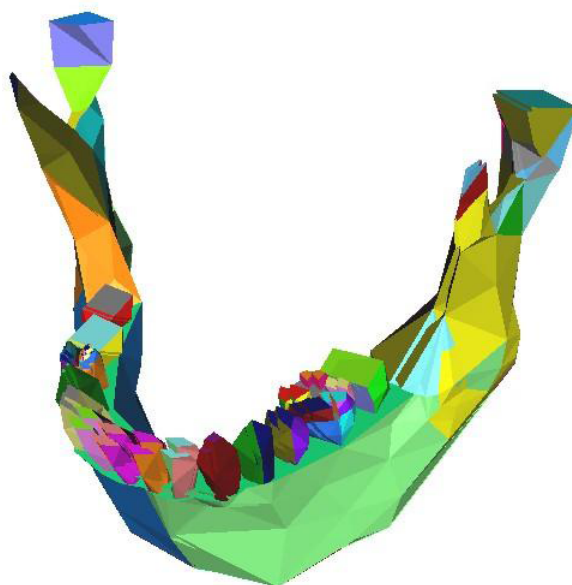
Donde $g_0 \in \mathbb{R}^3$ es la máxima intensidad del impacto en el instante $t_0 > 0$, donde $j \in \{j : \mu_j = \max M\}$, considerando que $M = \{\mu_i : 1 \leq i \leq 11\}$, tal que $\mu_i \in [0, 1]$ es el grado de pertenencia relacionado con el factor de interés. A cada x (posición del cuerpo mandibular) se le asigna un conjunto difuso X relativo a cada una de las zonas de la frontera según el factor afectado, como se aprecia en la Tabla 9.

Para esta simulación, se considera $\|g_0\| = 1000 \frac{N}{cm^2}$, con $t_0 = 1 s$. Para el cálculo, y $T=1 s$ y $\Delta t = 0.001 s$.

c. Análisis de desplazamiento y deformación. interpretación de resultados

Con el propósito de facilitar la visualización de los resultados del análisis de deformaciones y tensiones es común (para presentar los resultados obtenidos por el MEF) emplean una barra que posea una barra con menor a mayor colorificación, en la que se mide la incidencia de la solución hallada según su magnitud. En la investigación, se puede observar el desplazamiento, la tensión o la deformación de la mandíbula del paciente con TTM examinado. Es preciso destacar que la mandíbula no presenta una deformación mayor porque no se deforma ni se rompe por una simple masticación en pacientes identificados con TTM. Esto se aprecia en la Figura 13.

Figura 13: *Movimiento mandibular de un paciente con TTM: Desplazamiento con respecto al cóndilo izquierdo, caso estático (Superposición de mandíbulas)*

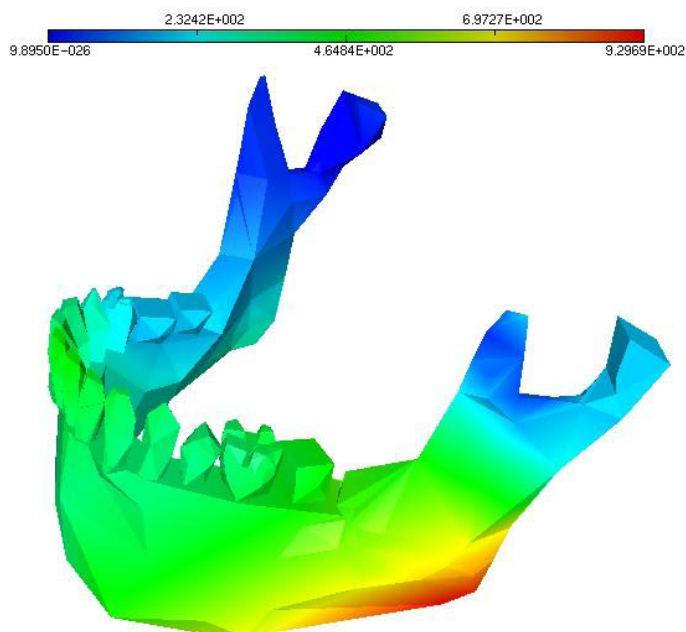


Nota. Tomado de Hananel (2015)

En la Figura 14 se observa que la mandíbula está en posición habitual y cerca de realizar un proceso de oclusión. A nivel estático, se observa que el cóndilo es uno de los menos afectados respecto al desplazamiento (color azul), pero cuando se genera el movimiento de oclusión, el color de la apófisis coronaria y las ramas mandibulares muestra un mayor desplazamiento. Debido

a esto, el paciente experimenta dolor, el cual se concentra en el mentón (color rojo). Algunos incisivos también pueden ser afectados. Lo explicado se presenta en la Figura 14.

Figura 14: *Análisis de desplazamientos*

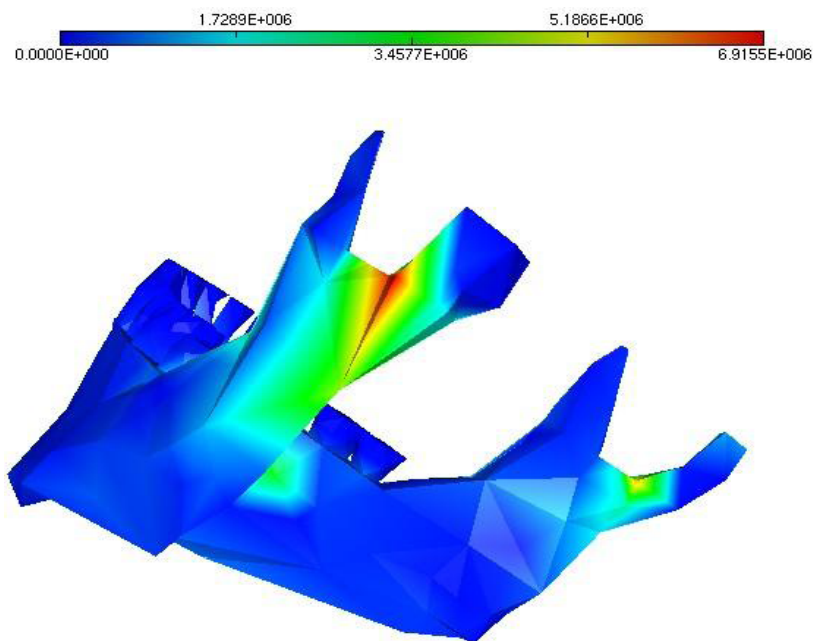


Nota. Tomado de Hananel (2015)

En la vista lateral (Figura 15) se observa que la mandíbula en su totalidad no sufre las consecuencias producidas por la tensión, sino solamente el área que comprende a la rama condilar y la espina Spiess, que son las más afectadas, lo cual se aprecia detalladamente cuando se observan las zonas verdosas y amarillentas de las Figuras 16, 17 y 18. Así también, en la Figura 15 se observa que la pieza que sujeta al cóndilo es una de las zonas afectadas medianamente por una inadecuada oclusión del paciente con TTM.

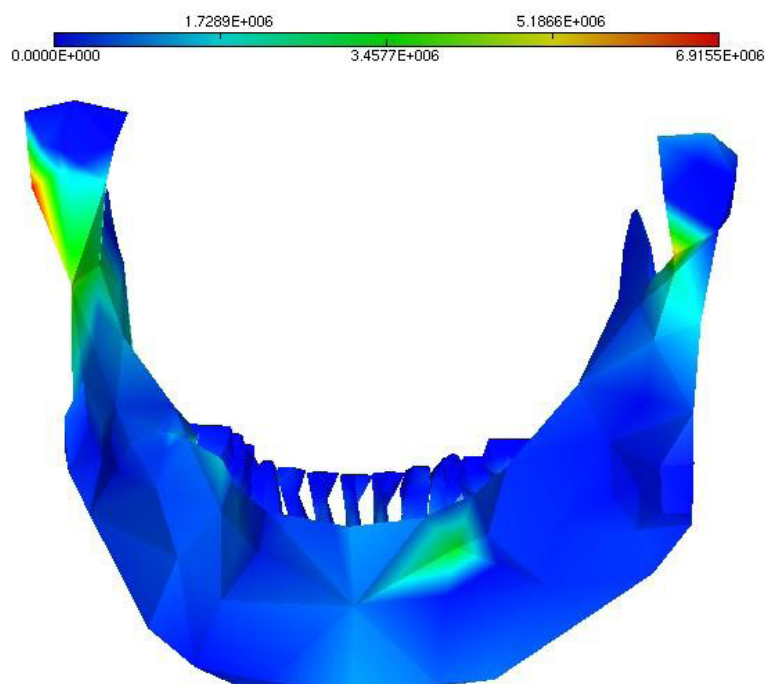
En la Figura 18, se visualiza que el área más afectada es el cóndilo izquierdo, por ende, se concluye que el factor oclusal se relaciona directamente con el desarrollo de un trastorno temporomandibular. Con esto se corrobora la importancia de incluir el índice oclusal en el sistema H y no solamente el índice de Fricton, para obtener resultados más completos

Figura 15: *Zonas afectadas en la zona de las molares, cóndilos izquierdo y derecho.*



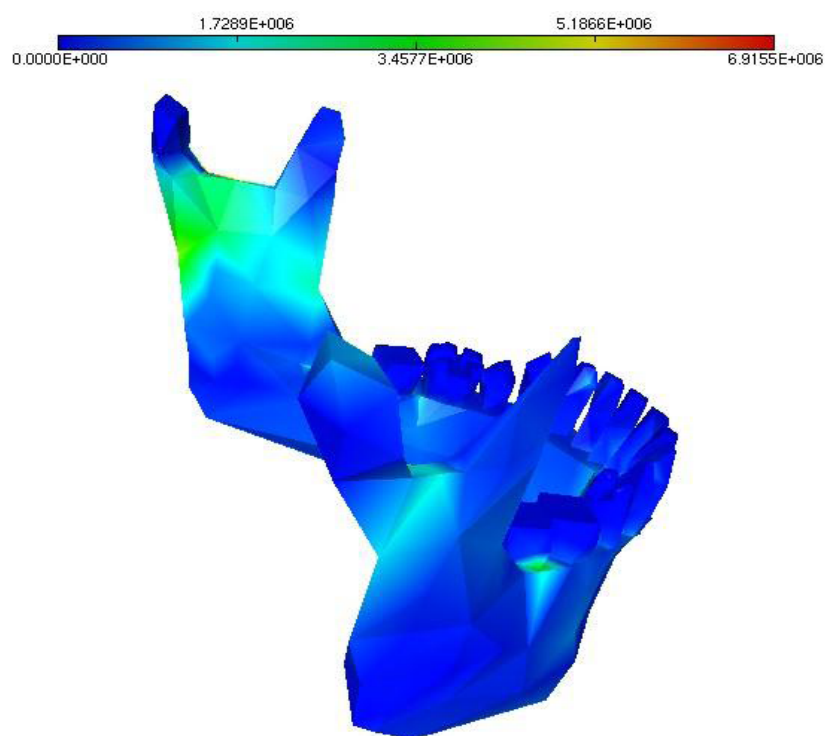
Nota. Tomado de Hananel (2015)

Figura 16: *Ramas condilares afectadas*



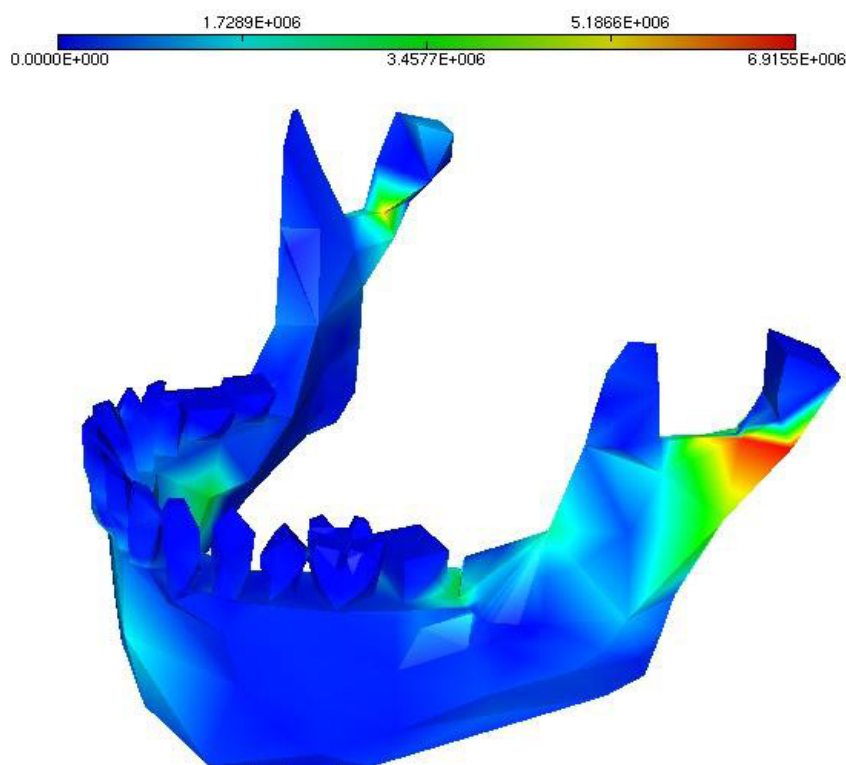
Nota. Tomado de Hananel (2015)

Figura 17: *Ramas condilares afectadas con valores heterogéneos.*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

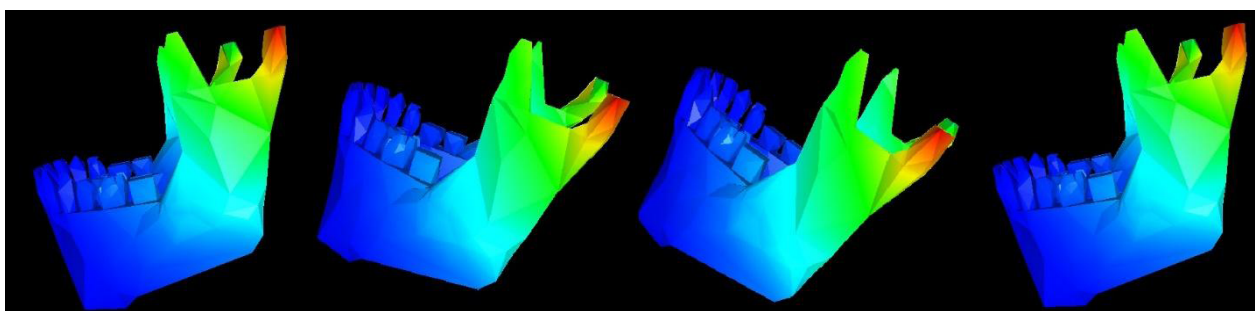
Figura 18: *Incisivos como variables no consideradas parte de TTM*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

En la Figura 16 se muestra que las dos ramas condilares fueron afectadas y presentan valores heterogéneos y altos, que era el resultado esperado para validarlos con los adquiridos por Koriath *et al.* (1992). Propio de una EDP de evolución, se puede visualizar que la variación de la tensión ocurrida en el cóndilo (zona roja) se vuelve más intensa conforme se genera el proceso de oclusión, como se aprecia en la Figura 19.

Figura 19: *Variación de la tensión en los cóndilos en distintos instantes de tiempo en un proceso de oclusión.*



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Para validar los resultados numéricos obtenidos se considera el estudio de Koriath (1992), donde se realiza una explicación sobre las cargas del área oclusal sobre la segunda molar inferior y los tipos de dientes donde se genera contacto, los cuales se clasifican en tres clases: carga bucal, carga distal y carga de oclusión intercuspidal (ICP). No obstante, se estima un patrón de carga 100 MPa de presión sobre la superficie elegida en las tres condiciones porque ejerce sin problema alguno la fuerza oclusal normal a la superficie si el punto oclusal es considerado como referente.

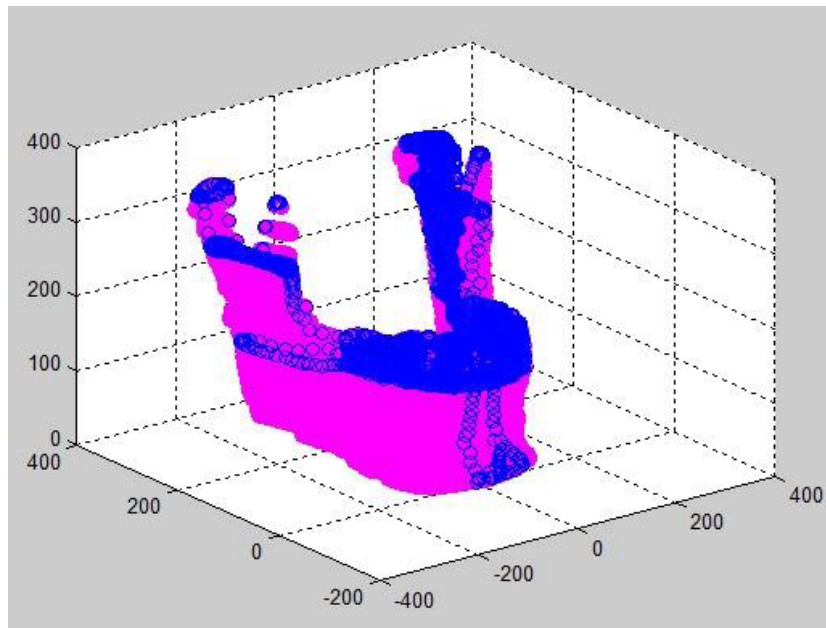
Para la contrastación de los resultados conseguidos a partir de las simulaciones con los resultados de Koriath (1992), el valor máximo de Von Mises en el cóndilo opuesto a la oclusión es 51.513 MPa cuando se aplica una carga del tipo ICP; no obstante, cuando se aplica una carga bucal o una carga distal, el valor máximo de Von Mises que se encuentra en el cóndilo opuesto incrementa a 69.566 MPa o 72.145 MPa, correspondientemente.

Independientemente de los resultados alcanzados, se debe aclarar que ciertas condiciones oclusales, por ejemplo, la mordida cruzada de la segunda molar o la diminuta erupción de la tercera molar superior, debe ser analizadas clínicamente y no biomecánicamente; de existir la posibilidad, se debe desestimar la formación del modelo a fin de evitar la obtención de datos inexactos.

Los resultados numéricos conseguidos dan a conocer que el cóndilo tiene tensiones máximas de 69.155 MPa en una carga, lo cual es semejante a los resultados alcanzados por Koriath (1992), cuyo valor fue 69.566 MPa con resultados entre 63.248 y 72.428, que tienen cierta similitud a los hallados en este estudio.

Un aporte al campo de la odontología de la presente investigación es advertir que la apófisis coronaria y las ramas —que provocan el desplazamiento máximo por sus componentes difusos— también son afectadas. Como resultado, existe la posibilidad de que exista un TTM que involucre a los incisivos, los cuales no deben ser considerados en un análisis posterior ante cualquier incidencia de dolor, puesto que no es una variable indispensable, pero puede estar presente en un paciente con TTM, como se aprecia en la Figura 18 (color verde). Se sugiere que en las futuras investigaciones se solucione el problema de los TTM por medio de métodos variacionales sin malla a través de sus elementos constitutivos, puntos y centros de colocación, y se contrasten los resultados. Una idea de la investigación propuesta se presenta en la 20.

Figura 20: Recomendación de estudio del problema de los TTM por métodos variacionales sin malla.



Nota. Tomado de Hananel (2015)

Conclusiones

En la presente investigación han desarrollado diferentes metodologías y algoritmos para la detección de trastornos temporomandibulares, la resolución numérica de problemas de contorno y la aproximación de curvas y superficies. Los aportes más relevantes de estudio se presentan a continuación:

1. La discretización de los métodos variacionales para resolver numéricamente los problemas de contorno y la aproximación de curvas y superficies por medio de la aplicación de métodos sin malla que se basan en funciones de base radial.
2. Respecto al estudio contrastado de los métodos de aproximación sin o con malla se obtuvo lo siguiente:
 - a. Los resultados alcanzados para los métodos sin malla demuestran ser mejor que los métodos con malla.
 - b. Luego de obtener un resultado numérico y si se requiere conseguir mejores resultados en el método con malla, debe empezar nuevamente todo

el proceso con el mallado correspondiente. En el método sin malla solo se requiere añadir más puntos o centros de colocación.

c. Los métodos utilizados son buenos, no obstante, los FBR son menos manipulables que los polinomios.

d. Para determinadas clases de elementos finitos se observa la existencia de más resultados de convergencia. Los resultados sobre la aplicación de FBR especifican siempre se encuentran en constante desarrollo.

e. Ningún método es mejor que otro porque lo que se gana en simplicidad se pierde en tiempo de computación y viceversa.

3. El diseño de un método variacional para resolver los problemas de contorno no lineales de orden 2 es de tipo iterativo y permite demostrar la unicidad y la existencia de solución en cada iteración, por ejemplo, la convergencia de la sucesión de aproximaciones a la solución exacta del problema de contorno.

4. Se determinó 11 posibles factores de pertenencia de una persona con TTM.

5. Diseño de un sistema experto para diagnosticar y pronosticar trastornos temporomandibulares y determinar el factor al cual el individuo diagnosticado pertenece.

6. Modelización matemática del proceso de oclusión, que consistió en un problema de evolución mixto con condiciones iniciales en tiempo y contorno en espacio. La modelización también fue aplicada en un problema variacional relacionado al anterior problema de evolución.

7. Diseño de un algoritmo de resolución numérica del proceso de oclusión. El algoritmo pertenece a la discretización del problema de evolución, en primer lugar, por método de diferencias finitas y, en segundo lugar, por método de los elementos finitos.

8. Programación del algoritmo en FreeFem++ para visualizar los resultados. Los resultados alcanzados en la presente investigación coinciden con los esperados por los expertos de estudio anteriores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alvarado-Menacho, S. (2019). Importancia de los índices simplificados en el diagnóstico y estudio de los Trastornos Temporomandibulares. *Revista Estomatológica Herediana*, 29(1), 89-94. http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1019-43552019000100010
- Ascher, U. M., Mattheij, R. M., & Russell, R. D. (1995). *Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations*. Society for Industrial and Applied Mathematics
- Ash, M., Ramfjord, S. & Parra, J. (1996). *Oclusion*. Interamericana.
- Ashman, R. B., & Van Buskirk, W. C. (1987). The elastic properties of a human mandible. *Advances in dental research*, 1(1), 64-67
- Bustamante, J. (2019). *Efecto de la coinfección por Helicobacter pylori sobre la respuesta inmune específica a Mycobacterium tuberculosis entre individuos con infección tuberculosa latente* [tesis de doctorado, Universidad del Valle]. Repositorio Institucional Univalle. <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/entities/publication/6f7819d7-5217-458a-9439-77255a8f6266>
- Cartan, H. (1997). *Cours de calcul différentiel*. Hermann.
- Casas, E. (2021). *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*. Universidad Cantabria. <https://acortar.link/nvX3KD>
- Chau, O., & Motreanu, V. (2002). Dynamic contact problems with velocity conditions. *International Journal of applied mathematics and computer science*, 12(1), 17-26.
- Cuevas Palma, S. (2019). *Diseño de una plataforma didáctica para el estudio del equilibrio de una bicicleta a través de técnicas de control* [tesis de licenciatura, Universidad del Valle de Guatemala]. Repositorio Institucional UVG. <https://repositorio.uvg.edu.gt/handle/123456789/3437>
- Del Caño, J. (s.f.). *Elasticidad*. Universidad de Valladolid. http://www.eis.uva.es/reic/Elas_Web/teoria/ELAS5.pdf

- Díaz, A. (2021). *Proyecto de estudio de prevalencia del trastorno temporomandibular, severidad y factores asociados* [trabajo final de maestría, Universidade de Coruña]. Repositorio Institucional RUC. <https://ruc.udc.es/dspace/handle/2183/30279>
- Franquet, J. (2020). *Curso práctico de análisis matemático superior*. UNED-Tortosa. <https://agronoms.cat/pdf/curso-practico-de-analisis-matematico-superior.pdf>
- Funakoshi, M., Fujita, N., & Takehana, S. (1976). Relations between occlusal interference and jaw muscle activities in response to changes in head position. *Journal of Dental Research*, 55(4), 684-690.
- Gale, E. N., Carlsson, S. G., Eriksson, A., & Jontell, M. (1984). Effects of dentists' behavior on patients' attitudes. *Journal of the American Dental Association*, 109(3), 444-446.
- Gaviria Posada, L. & Hernández Marulanda, A. (2021). Solución de la ecuación de Navier para el cálculo de elasticidad lineal en materiales nanoreforzados utilizando el método de elementos de frontera. *Revista Ingenierías USBMed*, 12(1), 34-42. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7973004>
- Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Gilbarg, D., & Trudinger, N. S. (1977). *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer.
- Grisvard, P. (1985). *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman.
- Guillen, M., Dulhoste, J., & Santos, R. (2016). Modelado del flujo en una tubería para detección de obstrucciones utilizando el método de colocación y el método de diferencias finitas. *Revista de la Facultad de Ingeniería U.C.V*, 31(4), 115-122. <https://acortar.link/qrnJVQ>
- Guillén, M., Dulhoste, J., & Santos, R. (2016). Modelado del flujo en una tubería para detección de obstrucciones utilizando el método de colocación y el método de diferencias finitas. *Revista de la Facultad de Ingeniería UCV*, 31(4), 115-122.
- Hananel, A. (2015). *Memoria de tesis: aproximación de curvas y superficies mediante métodos variacionales con y sin malla. Aplicación a trastornos temporomandibulares* [tesis de doctorado, Universidad de Granada]. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=57755>

- Hernández, J. (2018). Método de Elementos Finitos Para la Ecuación de Reacción-Difusión en Medios Heterogéneos. *Boletín de Matemáticas*, 25(2), 123-138. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/85492>
- Igic, A., Pavlovic, R., Steas, A., & Igić, S. (2001). Biomechanical Analysis of forces and moments generated in the mandible. *Facta Universitatis: Medicine and Biology*, 8(1), 39-45. <http://facta.junis.ni.ac.rs/mab/mab2001/mab2001-08.pdf>
- Ingervall, B., Carlsson, G., & Thilander, B. (1976). Postnatal development of the human temporomandibular joint II. A microradiographic study. *Acta odontologica scandinavica*, 34(3), 133-139. <https://shorturl.at/eqS57>
- Instituto Nacional de Investigación Dental y Craneofacial. (2022, 15 de enero). *Los trastornos temporomandibulares*. <https://www.nidcr.nih.gov/espanol/temas-de-salud/los-trastornos-temporomandibulares>
- Kirveskari, P., & Alanen, P. (1985). Association between tooth loss and TMJ dysfunction. *Journal of oral rehabilitation*, 12(3), 189-194
- Koolstra, J., & Van Eijden, T. (1997). The jaw open-close movements predicted by biomechanical modelling. *Journal of Biomechanics*, 30(9), 943-950. [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(97\)00058-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(97)00058-4)
- Korioth, T. (1992). *Finite element modelling of human mandibular biomechanics*. The University of British Columbia. <https://elibrary.ru/item.asp?id=5765670>
- Korioth, T., Romilly, D. & Hannam, A. (1993). 3-D finite element modelling of human jaw deformation during clenching. *Journal of Dental Research*, 72, 195. DOI: 10.1002/ajpa.1330880107
- Langtangen, H., y Mardal, K. (2016). *Introduction to Numerical Methods for Variational Problems* (Vol. 21). Springer International Publishing. <https://hpl-git.github.io/fem-book/doc/pub/book/pdf/fem-book-4print-2up.pdf>
- Lázaro, H. (2015). *Ecuaciones diferenciales Teoría, aplicaciones y problemas resueltos para ciencias e ingeniería*. Macro EIRL. <https://editorialmacro.com/wp-content/uploads/2021/02/9786123043094.pdf>

López-Aguado, M. & Gutiérrez-Provecho, L. (2019). Cómo realizar e interpretar un análisis factorial exploratorio utilizando SPSS. *REIRE Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, 12(2), 1-14. <https://doi.org/10.1344/reire2019.12.227057>

Lundh, H., & Westesson, P. L. (1991). Clinical signs of temporomandibular joint internal derangement in adults: an epidemiologic study. *Oral Surgery, Oral Medicine, Oral Pathology*, 72(6), 637-641. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/003042209190001S>

Machado, E., Machado, P., Cunali, P. A., & Grehs, R. A. (2010). Ortodontia como fator de risco para disfunções temporomandibulares: uma revisão sistemática. *Dental Press Journal of Orthodontics*, 15, e1-e10

Magnusson, T., Egermark, I., & Carlsson, G. (2000). A longitudinal epidemiologic study of signs and symptoms of temporomandibular disorders from 15 to 35 years of age. *Journal of Orofacial Pain*, 14(4), 310-319. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/11203765/>

Manzano, S., Solis, U., & Gafas, C. (2023). Esquema fisioterapéutico en pacientes reumáticos con trastornos temporomandibulares por bruxismo. *Revista Cubana de Reumatología*, 25(4). <https://revreumatologia.sld.cu/index.php/reumatologia/article/view/1170>

Matsuka, Y., Akhter, R., Morita, M., Ekuni, D., Monsur, N., & Furata, M. (2013). Self-reported aural symptoms, headache and temporomandibular disorders in Japanese young adults. *BMC Musculoskeletal Disorders*, 14(1), 58-64. <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/23384362/>

Mirlisenna, G. (2016, 22 de enero). *Método de los elementos finitos: ¿qué es?* ESS. <https://www.esss.co/es/blog/metodo-de-los-elementos-finitos-que-es/>

Molina, O., Dos Santos, J., Nelson, S., & Nowlin, T. (1999). A clinical study of specific signs and symptoms of CMD in bruxers classified by the degree of severity. *CRANIO®*, 17(4), 268-279. <https://doi.org/10.1080/08869634.1999.11746104>

Morales, E, Maghioros, M., Obregón, A., & Santos, J. (2020). Adaptación y análisis factorial del cuestionario de conducta de alimentación del adulto (AEBQ) en idioma español. *Archivos Latinoamericanos de Nutrición*, 70(1), 40-49. https://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0004-06222020000100040

Moreno-Chala, Y., Ros Santana, M., Sánchez Sanfiel, M., Also Morell, R., & Reyes Fonseca, A. (2021). Trastornos temporomandibulares y dolor muscular en pacientes mayores de 18 años. *Multimed*, 25(5), 1-13. <https://www.medigraphic.com/cgi-bin/new/resumen.cgi?IDARTICULO=111489>

Nelson, G. (1986). *Three dimensional computer modelling of human mandibular biomechanics* [tesis de maestría, Universidad de British Columbia]. Open Collections. <http://hdl.handle.net/2429/26506>

Nelson, G. J., & Hannam, A. G. (1982). A biomechanical simulation of the craniomandibular apparatus during tooth clenching. *JDentRes*, 61, 211. <https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2s0.0019910664-&origin=inward&txGid-c0281fc168f79d4e2793215e19c059a8>

Nelson, G., & Hannam, A. (1983). The simulation of muscle, tooth and joint biomechanics during isometric tooth clenching in man. *J. Dent. Res.*, 62, 687.

Nuño-Heredia, K., Popoca-Hernández, E., Carillo-Arellano, J., Espinosa de Santillana, I., & Martínez-Martínez, R. (2019). Tipo de bruxismo en pacientes con trastornos temporomandibulares de acuerdo al sexo. *Revista Mexicana de Estomatología*, 6(1), 26-32. <https://remexesto.com/index.php/remexesto/article/view/256>

Ohashi, E., & Paredes, D. (2002). Factorial analysis of the diagnosis of temporomandibular disorders criteria's: Articular evaluation. *Journal of Dental Research*, 81, A458-A458.

Ortega, C. (2021, 19 de noviembre). *Análisis factorial: Qué es y tipos que existen*. QuestionPro. <https://www.questionpro.com/blog/es/analisis-factorial/>

Ortiz, G. & Quito Vallejo, E. (2022). Efectividad de la terapia manual en trastornos temporomandibulares. Revisión de literatura. *Odontología Sanmarquina*, 25(1), e22075. <https://docs.bvsalud.org/biblioref/2022/02/1358541/ortiz-2517.pdf>

Peral, I. (2009). Métodos variacionales y ecuaciones en derivadas parciales.

Pérez, M. (2020). *Resolución numérica del problema de Bratu: diferencias finitas y métodos de continuación* [tesis de fin de grado, Universidade de Santiago de Compostela]. Repositorio Institucional USC. <https://minerva.usc.es/xmlui/handle/10347/26180>

- Pietrzak, G., Curnier, A., Botsis, J., Scherrer, S., Wiskott, A., & Belser, U. (2002). A nonlinear elastic model of the periodontal ligament and its numerical calibration for the study of tooth mobility. *Computer Methods in Biomechanics & Biomedical Engineering*, 5(2), 91-100
- Ponce, R., Rodríguez García, S., Soler Cardenas, S., & Martínez Brito, J. (2018). *Trastornos temporomandibulares. Retos para la APS*. IV Congreso virtual de Ciencias Morfológicas.
- Portalo, F., Santos, J., Sánchez, C., Arroyo, P, & Lozano, J. (2018). *Odorama: discriminación de setas con sistemas olfativos artificiales*. Actas de las XXXIX Jornadas de Automática, 5-7. <https://ruc.udc.es/dspace/handle/2183/24858>
- Pruim, G., De Jongh, H., & Ten-Bosch, J. (1980). Forces acting on the mandible during bilateral static bite at different bite force levels. *Journal of Biomechanics*, 13(9), 755-763.
- Prum, G., Ten Bosch, J., & De Jongh, H. (1978). Jaw muscle EMG-activity and static loading of the mandible. *Journal of Biomechanics*, 11(8-9), 389-395.
- Quezada, L. (2016). *Estudio de las propiedades de los sistemas dinámicos complejos y aplicaciones* [tesis de doctorado, Universidad Iberoamericana]. Repositorio Institucional Ibero. <https://ri.ibero.mx/bitstream/handle/ibero/470/016248s.pdf?sequence=1>
- Raviart, P., & Thomas, J. (1983). Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. Masson.
- Rodríguez, O. (2018). *Sobre la solución numérica de problemas inversos* [tesis de maestría, Universidad del Valle de Guatemala]. Repositorio Institucional UNAL. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/69700>
- Sirqueira Carvalho, T. & De Oliveira, J. (2023). Introdução aos métodos variacionais. *DESAFIOS-Revista Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins*, 2(1), 90-102. https://doi.org/10.20873/pibic2022_9%20
- Tizón, J. (2018). *Apuntes para una psicopatología basada en la relación. Variaciones psicopatológicas*. (Vol. 1). Herder Editorial. <https://acortar.link/a89Btl>

Tobón Cadavid, C. Patiño-Arcila, I., & Lemmel-Vélez, K. (2018). Análisis por elementos finitos del desempeño estructural de jaula de seguridad para vehículo Renault Logan bajo normatividad FIA. *Revista Cintex*, 23(2), 35-53. <https://doi.org/10.33131/24222208.312>

Wadhwa, L., Utreja, A., & Tewari, A. (1993). A study of clinical signs and symptoms of temporomandibular dysfunction in subjects with normal occlusion, untreated, and treated malocclusions. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 103(1), 54-61. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/088954069370105W>

Widmalm, S., Westesson, P., Brooks, S., Hatala, M. P., & Paesani, D. (1992). Temporomandibular joint sounds: correlation to joint structure in fresh autopsy specimens. *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, 101(1), 60-69

Wurgajt-Dreiman, R., Rappoport-Wurgajt, K., & Soler-Lioi, C. (2023). Signos y Síntomas en 3557 Pacientes con Trastornos Temporomandibulares. *International journal of odontostomatology*, 17(4), 492-497. https://www.scielo.cl/scielo.php?pid=S0718-381X2023000400492&script=sci_arttext

SOBRES LO AUTOR

Alberto Hananel Baigorria

Afiliación: Universidad Católica Santo Toribio De Mogrovejo

Correo: ahananel@usat.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4113-8623>

APLICACIÓN DE MÉTODOS VARIACIONALES EN LA MODELIZACIÓN DE TRASTORNOS TEMPOROMANDIBULARES



www.arcoeditores.com
contato@arcoeditores.com
(55)99723-4952