



Delio Merma Saico
Rolando Oscoco Solorzano
José Gil Huaman Monroy
Elias Ccorimanya Soto
María Elizabeth Pacheco Salas

**VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y
RAZONAMIENTO
GEOMÉTRICO MEDIANTE
ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS:
MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA**

ARCO
EDITORES ● ● ●



Delio Merma Saico
Rolando Oscoco Solorzano
José Gil Huaman Monroy
Elias Ccorimanya Soto
María Elizabeth Pacheco Salas

**VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y
RAZONAMIENTO
GEOMÉTRICO MEDIANTE
ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS:
MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA**

ARCO
EDITORES ● ● ●

Editor Chefe

Ivanio Folmer

Bibliotecária

Eliane de Freitas Leite

Revisora Técnica

Gabriella Eldereti Machado

Diagramação e Projeto Gráfico

Gabriel Eldereti Machado

Imagem capa

www.canva.com

Revisão

Organizadores e Autores(as)

Conselho Editorial

Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva - UNIDAVI

Prof. Dr. Astor João Schönnell Júnior - IFFAR

Prof. Dr. Alan Ricardo Costa - UFRR

Profa. Dra. Andréia Bulaty -UNESPAR

Profa. Dra. Carla da Conceição de Lima - UFVJM

Prof. Dr. Camilo Darsie de Souza - UNISC

Profa. Dra. Clarice Caldeira Leite - UFRGS

Profa. Dra. Cecilia Decarli - UFRGS

Prof. Dr. Carlos Adriano Martins - UNICID

Prof. Dr. Christian Dennys Monteiro de Oliveira - UFCE

Profa. Dra. Dayse Marinho Martins - UFMA

Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos - UEL

Prof. Dr. Dioni Paulo Pastorio -UFRGS

Prof. Dr. Douglas Manoel Antonio de Abreu Pestana dos Santos - FASESP

Profa. Dra. Elane da Silva Barbosa - UERN

Profa. Dra. Elen Gomes Pereira - IFBA

Profa. Dra. Francielle Benini Agne Tybusch - UFN

Prof. Dr. Francisco Odécio Sales - IFCE

Prof. Dr. Francisco Ricardo Miranda Pinto - UFCAT

Prof. Dr. Gilvan Charles Cerqueira de Araújo - UCB

Prof. Dr. Ismar Inácio dos Santos Filho - UFAL

Prof. Dr. Leonardo Bigolin Jantsch -UFSM

Profa. Dra Liziany Müller Medeiros - UFSM

Profa. Dra Marcela Mary José - UFRB

Prof. Dr. Mateus Henrique Köhler - UFSM

Prof. Dr. Michel Canuto de Sena - UFMS

Profa. Dra. Mônica Aparecida Bortolotti - UNICENTRO

Prof. Nilton David Vilchez Galarza - UPLA

Prof. Dr. Olavo Barreto de Souza - UEPB

Prof. Dr. Rafael Nogueira Furtado - UFABC

Prof. Dr. Roberto Araújo da Silva Vasques Rabelo - UNILUS

Prof. Dr. Rodrigo Toledo - USCS

Prof. Dr. Sidnei Renato Silveira - UFSM

Prof. Dr. Thiago Ribeiro Rafagnin - UFOB

Prof. Dr Tomás Raúl Gómez Hernández - UCLV

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Visualización espacial y razonamiento geométrico
mediante estrategias didácticas [livro
eletrônico] : modelo Van Hiele y geogebra /
Delio Merma Saico...[et al.]. --
Santa Maria, RS : Arco Editores, 2024.
PDF

Outros autores: Rolando Oscoco Solorzano, José Gil
Huaman Monroy, Elias Ccorimanya Soto, María Elizabeth
Pacheco Salas.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5417-228-8

1. Didática 2. Geometria - Estudo e ensino
3. Matemática - Estudo e ensino 4. Pesquisa
científica I. Saico, Delio Merma. II. Solorzano,
Rolando Oscoco. III. Monroy, José Gil Huaman. IV.
Soto, Elias Ccorimanya. V. Salas, María Elizabeth
Pacheco.

24-192457

CDD-516

Índices para catálogo sistemático:

1. Geometria 516

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415



10.48209/978-65-5417-228-8

Este livro é o resultado de uma pesquisa científica em atividades de ciência e tecnologia, intitulada *Estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele y Geogebra*, realizada na Universidad San Ignacio de Loyola.



CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS.....	7
ÍNDICE DE FIGURAS.....	8
RESUMEN.....	11
ABSTRACT.....	12
INTRODUCCIÓN.....	13
CAPÍTULO I.....	15
NOCIONES GENERALES SOBRE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS EN LAS MATEMÁTICAS.....	15
1.1. Definición de estrategias didácticas.....	16
1.2. Teorías de aprendizaje en matemáticas.....	19
1.3. Integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas..	22
1.3.1. Software educativo.....	22
1.3.2. Plataforma en línea.....	24
1.3.3. Aplicaciones interactivas.....	26
1.4. Evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.....	28
CAPÍTULO II.....	30
ASPECTOS MEDULARES CON RELACIÓN A LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO.....	30
2.1. Definiciones de visualización espacial y razonamiento geométrico..	31
2.2. Teorías cognitivas relacionadas con la visualización espacial.....	33
2.3. Razonamiento geométrico y su rol en el aprendizaje matemático..	36
2.4. Tecnología y visualización espacial.....	38
2.5. Evaluación de la visualización espacial y razonamiento geométrico.	40
CAPÍTULO III.....	42
FUNDAMENTOS CENTRALES ENTORNO AL MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA.....	42

3.1. Conceptualización sobre el Modelo Van Hiele.....	43
3.2. Introducción a GeoGebra como herramienta para la enseñanza de geometría.....	46
3.3. Niveles en el Modelo Van Hiele.....	48
3.4. Implementación del Modelo Van Hiele con GeoGebra.....	50
3.5. Ventajas de combinar el Modelo Van Hiele y GeoGebra.....	52
CAPÍTULO IV.....	55
ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO, ORIENTADO POR EL MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA.....	55
CAPÍTULO V.....	85
MODELACIÓN Y VALIDACIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO, ORIENTADO POR EL MODELO VAN HIELE Y EL USO DE GEOGEBRA.....	85
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	124
SOBRES LOS AUTORES.....	131

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Matriz de organización de instrumentos.....	58
Tabla 2 Características de las respuestas, de una prueba con respuesta abierta.....	62
Tabla 3 Ponderaciones a cada tipo de respuesta.....	63
Tabla 4 Valores cuantitativos y cualitativos de los grados de adquisición del nivel de Van Hiele.....	63
Tabla 5 Matriz de la estructura organizacional de la estrategia didáctica....	90

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Respuesta del ítem 1.....	64
Figura 2	Respuesta del ítem 2A.....	64
Figura 3	Respuesta del ítem 2B.....	65
Figura 4	Respuesta del ítem 2C.....	66
Figura 5	Respuesta del ítem 3A.....	66
Figura 6	Respuesta del ítem 3B.....	67
Figura 7	Respuesta del ítem 3C.....	67
Figura 8	Respuesta del ítem 4A.....	68
Figura 9	Respuesta del ítem 4B.....	69
Figura 10	Respuesta del ítem 4C.....	69
Figura 11	Respuesta del ítem 5A.....	70
Figura 12	Respuesta del ítem 5B.....	71
Figura 13	Respuesta del ítem 5C.....	71
Figura 14	Respuesta del ítem 6A.....	72
Figura 15	Respuesta del ítem 6B.....	73
Figura 16	Respuesta del ítem 6C.....	73
Figura 17	Respuesta del ítem 7.....	74
Figura 18	Respuesta del ítem 8.....	75
Figura 19	Respuesta del ítem 9.....	75
Figura 20	Respuesta de la docente Fanny, ítem 4 del cuestionario para docentes.....	77
Figura 21	Respuesta de la estudiante Rosa Luz.....	79
Figura 22	Unidad funcional teórica de la propuesta.....	88
Figura 23	Visualización de sólidos geométricos.....	91
Figura 24	Agrupación de los sólidos geométricos.....	92
Figura 25	Segundo paso uso de GeoGebra.....	93

Figura 26	Tercer paso uso de GeoGebra.....	94
Figura 27	Cuarto paso uso de GeoGebra.....	94
Figura 28	Quinto paso uso de GeoGebra.....	95
Figura 29	Sexto paso uso de GeoGebra.....	95
Figura 30	Séptimo paso uso de GeoGebra.....	96
Figura 31	Octavo paso uso de GeoGebra.....	96
Figura 32	Noveno paso uso de GeoGebra.....	97
Figura 33	Décimo paso uso de GeoGebra.....	97
Figura 34	Resultado al usar GeoGebra.....	98
Figura 35	Esfera diseñada en GeoGebra.....	99
Figura 36	Rompecabezas silábicas.....	102
Figura 37	Material del grupo “Cilindro”.....	102
Figura 38	Material del grupo “Cono”.....	103
Figura 39	Material del grupo “Esfera”.....	103
Figura 40	Estructura del grupo “Cilindro”.....	104
Figura 41	Estructura del grupo “Cono”.....	104
Figura 42	Estructura del grupo “Esfera”.....	104
Figura 43	Segundo paso para diseñar cilindro.....	106
Figura 44	Tercer paso para diseñar cilindro.....	106
Figura 45	Cuarto paso para diseñar cilindro.....	107
Figura 46	Quinto paso para diseñar cilindro.....	107
Figura 47	Séptimo paso para diseñar cilindro.....	108
Figura 48	Décimo paso para diseñar cilindro.....	109
Figura 49	Generación del cono.....	109
Figura 50	Generación de la esfera.....	110
Figura 51	Posibles gráficos respecto al cilindro.....	113
Figura 52	Posibles gráficos respecto al cono.....	114
Figura 53	Segundo paso para el cilindro 3D.....	115

Figura 54 Tercer paso para el cilindro 3D.....	116
Figura 55 Cuarto paso para el cilindro 3D.....	117
Figura 56 Tanque de agua.....	119
Figura 57 Representación de la imagen del tanque propuesta por estudiantes.....	120
Figura 58 Volumen en GeoGebra.....	121
Figura 59 Relación de Arquímedes.....	122

RESUMEN

La estrategia didáctica integra el modelo de Van Hiele y GeoGebra para impulsar la visualización espacial y el razonamiento geométrico. Basada en sólidos principios teóricos, el modelo de Van Hiele estructura niveles de razonamiento, mientras que GeoGebra, como herramienta educativa, potencia la experiencia visual e interactiva. Dicha estrategia se enfoca en el desarrollo de competencias, alineándose con enfoques contemporáneos para promover un aprendizaje profundo y contextualizado en geometría. La estrategia didáctica diseñada se basa en el modelo de Van Hiele y GeoGebra, y moviliza recursos para el cambio educativo. Los estudiantes enfrentan dificultades en identificar sólidos de revolución y visualizar en el espacio tridimensional, mientras que los docentes no exploran conocimientos previos y la estrategia de enseñanza a veces carece de orientación. Por lo expuesto, el propósito de la investigación fue diseñar una estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele con el uso del GeoGebra en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” de Cusco.

Palabras clave: Estrategia didáctica, modelo Van Hiele, GeoGebra, razonamiento geométrico, visualización espacial

ABSTRACT

The didactic strategy integrates Van Hiele's model and GeoGebra to foster spatial visualization and geometric reasoning. Based on solid theoretical principles, the Van Hiele model structures levels of reasoning, while GeoGebra, as an educational tool, enhances the visual and interactive experience. This strategy focuses on the development of competencies, aligned with contemporary approaches to promote deep and contextualized learning in geometry. The didactic strategy designed is based on Van Hiele's model and GeoGebra, and mobilizes resources for educational change. Students face difficulties in identifying solids of revolution and visualizing in three-dimensional space, while teachers do not explore prior knowledge and the teaching strategy sometimes lacks guidance. Therefore, the purpose of the research was to design a didactic strategy to develop spatial visualization and geometric reasoning, oriented by the Van Hiele model with the use of GeoGebra in fourth grade students of the Educational Institution "Sacred Heart of Jesus" of Cusco.

Keywords: Didactic strategy, Van Hiele model, GeoGebra, geometric reasoning, spatial visualization.

INTRODUCCIÓN

La estrategia didáctica propuesta tiene como objetivo fundamental el desarrollo integral de la visualización espacial y el razonamiento geométrico en estudiantes, centrándose en la comprensión de sólidos geométricos. En este sentido, al guiarse del modelo de Van Hiele y haciendo uso de la herramienta educativa GeoGebra, esta estrategia se fundamenta en la teoría de la visualización como una capacidad esencial para la interpretación y creación matemática. Incorpora fases específicas, articuladas con el proceso pedagógico, y se apoya en el enfoque de aprendizaje por competencias propuesto por el Ministerio de Educación. La metodología busca no solo mejorar el rendimiento académico, sino también fomentar la capacidad de los estudiantes para enfrentar desafíos geométricos, promoviendo un aprendizaje significativo y duradero.

Los tres primeros capítulos exponen las bases teóricas en torno a la temática expuesta. En el primer capítulo se exponen las nociones generales de las estrategias didácticas en las matemáticas. Para ello, se atiende tanto a su definición como a las teorías que existen en su desenvolvimiento. Además, se detalla la integración de la tecnología en el proceso de formación. En el segundo capítulo se contemplan los aspectos medulares con relación a la visualización espacial y el razonamiento geométrico, enfocándose en sus definiciones, teorías cognitivas y su aplicación mediante la innovación tecnológica. En el caso del tercer capítulo se puntualizan los fundamentos centrales en torno al modelo Van Hiele y GeoGebra. En esta sección, se describe su conceptualización y su implementación en el aprendizaje de las matemáticas, considerando sus ventajas para dicha formación. En el cuarto capítulo se contempla el análisis realizado, específicamente en la estrategia didáctica para desarrollar la visualización

espacial y el razonamiento geométrico, orientada por el modelo Van Hiele y GeoGebra. En el quinto capítulo se presenta el proyecto implementado en los estudiantes y docentes.

En ese aspecto, se presencia la modelación y validación de la estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico orientado por el modelo Van Hiele y el uso de GeoGebra. Su propósito fue diseñar una estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele con el uso del GeoGebra en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa Sagrado Corazón de Jesús, de Cusco.

CAPÍTULO I

NOCIONES GENERALES SOBRE LAS ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS EN LAS MATEMÁTICAS

Las estrategias didácticas en el ámbito de las matemáticas constituyen un pilar fundamental en la búsqueda de facilitar el aprendizaje significativo y efectivo de esta disciplina. En su esencia, estas estrategias comprenden enfoques pedagógicos cuidadosamente diseñados para transmitir conceptos matemáticos de manera comprensible y estimulante. Este contexto pedagógico abarca una diversidad de elementos clave, desde la selección de métodos de enseñanza hasta la aplicación de teorías de aprendizaje específicas (De la Rosa *et al.*, 2019).

Para investigadores como Martins *et al.* (2022), entre las teorías de aprendizaje influyentes en el ámbito de las matemáticas se destaca la teoría constructivista, que postula que el aprendizaje es un proceso activo donde los estudiantes construyen su comprensión a través de la interacción con la información y la experiencia. Además, la teoría sociocultural de Vygotsky resalta la importancia del entorno social y cultural en el aprendizaje matemático, subrayando la colaboración y la interacción entre estudiantes como aspectos fundamentales. Estas teorías, junto con enfoques basados en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, influyen en las estrategias que los educadores emplean para presentar y conectar conceptos matemáticos en contextos significativos.

En paralelo, Vargas-Murill (2020) señala que la integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha sido un catalizador significativo

en la transformación del aprendizaje. Las plataformas en línea, los *software* educativos adaptables y las aplicaciones interactivas ofrecen herramientas que no solo facilitan la comprensión conceptual, sino que también enriquecen la experiencia de aprendizaje al proporcionar interactividad, visualización dinámica y retroalimentación instantánea.

Además, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, la evaluación emerge como un componente clave. La evaluación formativa durante el aprendizaje permite ajustes inmediatos en la instrucción, mientras que la evaluación sumativa ofrece una visión consolidada del rendimiento, guiando decisiones educativas futuras. En conjunto, estas nociones generales de estrategias didácticas, teorías de aprendizaje, integración tecnológica y evaluación forman un tejido interconectado que define la práctica pedagógica efectiva en la enseñanza de las matemáticas (Alsina *et al.*, 2019).

1.1 Definición de estrategias didácticas

Como señalan De la Rosa *et al.* (2019), las estrategias didácticas constituyen un conjunto planificado de enfoques y técnicas que los educadores emplean para facilitar el aprendizaje efectivo de los estudiantes. Estas estrategias van más allá de la simple transmisión de información, pues buscan involucrar de manera activa a los estudiantes en procesos cognitivos y fomentar el desarrollo de habilidades críticas. Las estrategias didácticas pueden abarcar desde métodos de enseñanza tradicionales, como conferencias y ejercicios prácticos, hasta enfoques más innovadores que incorporan tecnología, colaboración y métodos activos de participación. En esencia, el diseño de estrategias didácticas implica una adaptación reflexiva a las necesidades y estilos de aprendizaje de los estudiantes, permitiendo la creación de entornos educativos dinámicos y efectivos.

Las estrategias didácticas eficaces también consideran la diversidad de los estudiantes, reconociendo que cada individuo tiene estilos y ritmos de aprendizaje únicos. Asimismo, buscan promover un aprendizaje significativo, conectando los conceptos nuevos con los conocimientos previos, aplicándolos a situaciones prácticas. Al ser flexibles y orientadas hacia los objetivos de aprendizaje, las estrategias didácticas proporcionan a los educadores un conjunto de herramientas para adaptarse a diferentes contextos y responder a las cambiantes necesidades educativas. En última instancia, estas estrategias constituyen un componente esencial de la planificación educativa, contribuyendo de manera significativa a la efectividad y el impacto positivo del proceso de enseñanza y aprendizaje (Valencia, 2022).

A su vez, las estrategias didácticas específicas diseñadas para el aprendizaje de las matemáticas buscan ir más allá de la simple transmisión de fórmulas y procedimientos, centrándose en el desarrollo de un entendimiento profundo y conexiones significativas entre conceptos. Una estrategia comúnmente empleada es la resolución de problemas, que impulsa a los estudiantes a aplicar sus conocimientos matemáticos en situaciones prácticas y contextualizadas. Esta aproximación fomenta la aplicación de conceptos, a la vez que promueve el razonamiento lógico y la resolución creativa de situaciones diversas (Muñoz, 2020).

De acuerdo con Cedeño *et al.* (2020), otra estrategia clave es la manipulación de objetos y materiales concretos, especialmente en las primeras etapas de aprendizaje. El uso de manipulativos, como bloques, fichas y modelos tridimensionales, facilita la comprensión de conceptos abstractos al brindar una representación tangible de las ideas matemáticas. Asimismo, la integración de la tecnología, como el uso de *software* educativo especializado o plataformas interactivas, proporciona oportunidades para la visualización dinámica, la ex-

ploración y la simulación, enriqueciendo la comprensión de conceptos matemáticos complejos.

Para Valencia (2022), las estrategias de enseñanza diferenciada son esenciales para abordar la diversidad de habilidades y estilos de aprendizaje presentes en el aula de matemáticas. La adaptación del contenido, la presentación de información y las actividades según las necesidades individuales de los estudiantes garantizan un aprendizaje más efectivo y motivador. Además, el fomento de la comunicación y discusión en clase promueve el pensamiento crítico y la comprensión colectiva de los conceptos matemáticos, generando un entorno colaborativo que fortalece la construcción del conocimiento.

En conclusión, la implementación de estrategias didácticas efectivas en la enseñanza de las matemáticas representa un compromiso con la construcción activa del conocimiento, la estimulación del pensamiento crítico y la promoción de un aprendizaje significativo. Al abordar las necesidades individuales de los estudiantes y utilizar enfoques pedagógicos que trascienden la mera memorización de fórmulas, se crea un ambiente en el cual los conceptos matemáticos se vuelven accesibles y relevantes. La combinación de resolución de problemas, manipulación de materiales concretos, integración tecnológica y estrategias diferenciadas constituye un enfoque integral que empodera a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos con confianza.

En última instancia, al cultivar la comprensión profunda y el amor por las matemáticas, las estrategias didácticas no solo cumplen con el objetivo de transmitir conocimientos, sino que además contribuyen a la formación de individuos capaces, críticos y hábiles en el uso de herramientas matemáticas en su vida diaria y en futuros desafíos académicos y profesionales.

1.2 Teorías de aprendizaje en matemáticas

Las teorías de aprendizaje en matemáticas proporcionan marcos conceptuales que explican cómo los estudiantes adquieren, procesan y retienen conocimientos matemáticos. Entre las teorías más influyentes se encuentra la teoría constructivista, una de las más influyentes, que ha transformado significativamente la enseñanza de las matemáticas al enfocarse en el papel activo del estudiante en la construcción de su conocimiento. En este enfoque, el aprendizaje matemático no se limita a la memorización de fórmulas y procedimientos, sino que se convierte en un proceso dinámico en el cual los alumnos participan activamente en la resolución de problemas y la exploración de conceptos. A través de la interacción con la información y la reflexión sobre sus propias soluciones, los estudiantes no solo adquieren conocimientos matemáticos, sino que también desarrollan un entendimiento profundo y significativo de los conceptos y procesos involucrados (Martins *et al.*, 2022).

A decir de Martínez *et al.* (2019), la aplicación de la teoría constructivista en la enseñanza de las matemáticas fomenta la autonomía y la creatividad, ya que los estudiantes son desafiados a pensar críticamente y a buscar diversas formas de abordar los problemas. Los educadores, en este contexto, actúan como facilitadores del aprendizaje, guiando y apoyando a los estudiantes en su viaje de descubrimiento matemático. De esta manera, la teoría constructivista no solo influye en la forma en que se abordan los contenidos matemáticos, sino que también nutre el desarrollo de habilidades cognitivas, metacognitivas y afectivas que son esenciales para el éxito en el aprendizaje matemático y su aplicación en contextos del mundo real.

Asimismo, Solares-Rojas (2021) sostiene que la teoría sociocultural de Vygotsky ha dejado una huella significativa en la comprensión del aprendizaje matemático al resaltar la intrínseca conexión entre el entorno social y cultural, y la adquisición de conocimientos. En el ámbito de las matemáticas, esta teoría

sugiere que el aprendizaje se ve enriquecido cuando los estudiantes participan activamente en procesos colaborativos e interactivos con sus compañeros. La colaboración matemática, al fomentar el diálogo y la negociación de significados, ofrece a los estudiantes la oportunidad de compartir diversas perspectivas, estrategias y soluciones, lo que contribuye a una comprensión más completa de los conceptos matemáticos. Además, la presencia de un educador como guía es esencial, ya que puede facilitar y enriquecer estas interacciones, brindando apoyo, planteando preguntas reflexivas y proporcionando estructuras para el desarrollo del pensamiento matemático.

En simultáneo, los enfoques educativos inspirados en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau han desempeñado un papel crucial en la transformación de la enseñanza de las matemáticas al insistir en la necesidad de contextualizar los conceptos matemáticos dentro de situaciones reales y significativas para los estudiantes. Esta teoría postula que los contenidos matemáticos deben presentarse en contextos concretos y prácticos para que los estudiantes puedan comprender de manera más profunda y aplicar sus conocimientos de manera efectiva. En el ámbito matemático, esto implica la creación de situaciones didácticas que conecten los conceptos abstractos con experiencias cotidianas, permitiendo que los estudiantes reconozcan la utilidad y la relevancia de las matemáticas en sus vidas (Santos, 2023).

Este enfoque también destaca la importancia de que los estudiantes participen activamente en la resolución de problemas que reflejen situaciones auténticas. Al enfrentarse a desafíos matemáticos que simulan problemas del mundo real, los estudiantes no solo adquieren habilidades matemáticas prácticas, sino que también desarrollan un entendimiento más profundo de cómo aplicar los conceptos en contextos variados. En consecuencia, la teoría de situaciones didácticas de Brousseau ha influido en la enseñanza de las matemáticas al propugnar un enfoque pedagógico que va más allá de la mera presentación de fór-

mulas y procedimientos, promoviendo una comprensión más rica y transferible de los conceptos matemáticos (Carvalho y Vireira, 2022).

Algunos autores, como Villarroel-Solís y Mazo-Barrera (2020), indican que la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel ha ejercido una influencia significativa en la enseñanza de las matemáticas, proponiendo que el aprendizaje es más efectivo cuando se establecen conexiones significativas entre los nuevos conocimientos y las experiencias y conocimientos previos de los estudiantes. En el ámbito matemático, este enfoque implica reconocer y construir sobre la base conceptual que los estudiantes ya poseen. La vinculación de nuevos conceptos con experiencias previas y conocimientos establece un puente cognitivo que facilita una comprensión más profunda y duradera. Esto es especialmente relevante en matemáticas, donde los conceptos a menudo se construyen de manera acumulativa, y el establecimiento de relaciones significativas entre los conocimientos previos y los nuevos facilita la asimilación y la retención de la información.

En resumen, las diversas teorías de aprendizaje en matemáticas han enriquecido y diversificado el panorama educativo, proporcionando a los educadores herramientas conceptuales valiosas para diseñar enfoques pedagógicos efectivos y centrados en el estudiante. Desde la perspectiva constructivista, que destaca la actividad del estudiante en la construcción de su conocimiento, hasta la influencia sociocultural, que subraya la importancia de la interacción social y el entorno cultural en el aprendizaje, estas teorías han moldeado la forma en que se concibe y aborda la enseñanza de las matemáticas. La conexión significativa de nuevos conceptos con conocimientos previos, propuesta por la teoría del aprendizaje significativo, y la insistencia en situar los contenidos matemáticos en contextos reales, según la teoría de situaciones didácticas, han transformado la educación matemática en una experiencia más relevante, motivadora y accesible para los estudiantes. Al integrar estos enfoques, los educadores pueden

cultivar un entorno de aprendizaje dinámico que no solo transmite conocimientos, sino que también nutre la comprensión profunda y la aplicación práctica de las matemáticas en la vida cotidiana y más allá.

1.3 Integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas

La integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha emergido como un componente fundamental en la evolución de la educación contemporánea. La proliferación de *software* educativo, plataformas en línea y aplicaciones interactivas ha transformado la manera en que los educadores abordan la instrucción matemática, proporcionando herramientas poderosas para enriquecer y personalizar el proceso de aprendizaje. Estas tecnologías ofrecen oportunidades únicas para la visualización dinámica, la interactividad y la adaptabilidad, permitiendo a los estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera práctica y participativa. En este contexto, la tecnología no solo se convierte en un medio para transmitir información, sino en un facilitador que promueve el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la aplicación práctica de los principios matemáticos en situaciones del mundo real (Martínez *et al.*, 2019).

1.3.1. Software educativo

Para Díaz *et al.* (2021), el *software* educativo ha emergido como una herramienta esencial y versátil en la enseñanza de las matemáticas, transformando significativamente la forma en que los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos. Este tipo de *software* abarca una amplia gama de aplicaciones diseñadas específicamente para facilitar el aprendizaje matemático, desde programas interactivos que ofrecen ejercicios prácticos hasta simulaciones detalladas que permiten explorar fenómenos matemáticos complejos.

Por otro lado, Maldonado *et al.* (2020) señalan que la adaptabilidad inherente al *software* educativo ha revolucionado la forma en que los educadores pueden abordar las necesidades individuales de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Con la capacidad de personalizar la instrucción, los educadores pueden diseñar experiencias de aprendizaje que se ajustan específicamente al nivel de competencia y al ritmo de aprendizaje de cada estudiante. Esta personalización va más allá de la mera diferenciación, permitiendo a los educadores proporcionar ejercicios y evaluaciones que se alinean estrechamente con las fortalezas y desafíos particulares de cada estudiante. Ya sea reforzando conceptos previos o presentando nuevos desafíos, el *software* educativo se convierte en un aliado estratégico que permite a los educadores adaptar su enfoque según las necesidades únicas de cada alumno.

La interactividad de los gráficos y las representaciones visuales ofrece una perspectiva más intuitiva, así como también permite a los estudiantes explorar activamente estos conceptos. Al manipular visualmente gráficos de funciones, rotar figuras geométricas o interactuar con representaciones estadísticas dinámicas, los estudiantes pueden desarrollar una comprensión más profunda y contextualizada de los principios matemáticos. Esta capacidad de exploración activa a través de la visualización dinámica no solo estimula el pensamiento crítico, sino que fomenta un enfoque más participativo y comprometido con el aprendizaje matemático. En última instancia, la visualización dinámica facilitada por el *software* educativo representa una poderosa herramienta para transformar conceptos abstractos en experiencias tangibles y accesibles para los estudiantes (Díaz *et al.*, 2021).

Aunado a ello, la retroalimentación inmediata proporcionada por los programas de *software* educativo representa un componente crucial para el desarrollo efectivo de habilidades matemáticas. La capacidad de recibir comentarios

instantáneos después de completar ejercicios permite a los estudiantes corregir errores de manera rápida y precisa, lo que contribuye a un aprendizaje más efectivo y a la consolidación de conceptos. Este proceso iterativo de recibir retroalimentación y ajustar la comprensión mejora la precisión en la aplicación de fórmulas y procedimientos, a la vez que promueve una mayor confianza y autonomía en el proceso de aprendizaje matemático (Gutiérrez *et al.*, 2021).

En última instancia, el *software* educativo no solo trata de ampliar el acceso al material matemático, sino que también actúa como un catalizador para un aprendizaje más participativo, colaborativo y centrado en el estudiante. La capacidad de personalizar la experiencia de aprendizaje, recibir retroalimentación inmediata y acceder a recursos interactivos crea un entorno dinámico que fomenta la exploración activa y el compromiso. Además, muchos programas incorporan elementos colaborativos que permiten a los estudiantes trabajar juntos en tiempo real, promoviendo la colaboración y el intercambio de ideas. En este sentido, el *software* educativo se erige como un aliado valioso para los educadores, ayudando a cultivar no solo conocimientos matemáticos sólidos, sino también habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico en un contexto participativo y colaborativo.

1.3.2. Plataforma en línea

Las plataformas en línea han irrumpido de manera significativa en el ámbito educativo, desempeñando un papel destacado en la transformación de la enseñanza de las matemáticas. Estas plataformas, que van desde entornos virtuales de aprendizaje hasta herramientas interactivas especializadas, ofrecen a educadores y estudiantes un acceso sin precedentes a recursos educativos matemáticos. Al proporcionar un espacio digital donde los estudiantes pueden interactuar con contenido matemático de manera personalizada, las plataformas en línea permiten la adaptabilidad a diversos estilos de aprendizaje y niveles de competencia (Pereira *et al.*, 2022).

Según Guerra y Rodríguez (2023), la capacidad de las plataformas en línea para proporcionar actividades interactivas y evaluaciones en tiempo real representa un avance significativo en la enseñanza de las matemáticas. Los estudiantes se benefician al participar activamente en actividades prácticas que van más allá de la mera memorización de fórmulas, permitiéndoles aplicar conceptos matemáticos en situaciones prácticas y contextualizadas. La resolución interactiva de problemas matemáticos no solo impulsa la comprensión profunda de los conceptos, sino que a la vez fomenta el pensamiento crítico y la resolución creativa de desafíos matemáticos.

Al respecto, Campillo *et al.* (2019) destacan que la retroalimentación instantánea proporcionada durante estas actividades interactivas se convierte en un componente clave para mejorar el aprendizaje. Los estudiantes reciben comentarios inmediatos sobre sus respuestas, lo que no solo les permite corregir errores de manera rápida, sino que también refuerza la comprensión de los conceptos. Además, esta retroalimentación en tiempo real brinda a los educadores una visión detallada del progreso de cada estudiante, permitiéndoles identificar áreas de fortaleza y debilidad. Esta capacidad de evaluar y ajustar la instrucción según las necesidades individuales de los estudiantes empodera a los educadores para ofrecer una enseñanza más personalizada y efectiva, contribuyendo así a un aprendizaje matemático más significativo y adaptativo.

Como señalan Pereira *et al.* (2022), la participación en actividades grupales a través de plataformas en línea no solo amplía la comprensión de los estudiantes al exponerlos a diversas formas de abordar los desafíos matemáticos, sino que también promueve habilidades de trabajo en equipo y de comunicación. Al conectarse con compañeros de todo el mundo, los estudiantes pueden beneficiarse de una diversidad de experiencias y enfoques culturales hacia la resolución de problemas matemáticos. La creación de comunidades virtuales en estas plataformas no solo mejora la experiencia de aprendizaje, sino que también establece un entorno que refleja la realidad de la colaboración en la

resolución de problemas en el mundo profesional y académico. En última instancia, estas comunidades virtuales contribuyen a una experiencia educativa más completa y conectada, en la que los estudiantes pueden aprender unos de otros y construir conocimientos matemáticos de manera colaborativa.

En resumen, las plataformas en línea han emergido como agentes transformadores en la enseñanza de las matemáticas, proporcionando un entorno educativo interactivo y accesible. Desde la capacidad de ofrecer actividades interactivas y evaluaciones en tiempo real hasta la promoción de la colaboración y el intercambio de conocimientos a través de comunidades virtuales, estas plataformas han redefinido la forma en que los estudiantes y educadores abordan los desafíos matemáticos. La flexibilidad, la adaptabilidad y la diversidad de recursos ofrecidos por estas plataformas, por lo tanto, han ampliado el acceso al aprendizaje matemático y cultivado un entorno de aprendizaje dinámico y colaborativo. En un mundo cada vez más digital, las plataformas en línea se perfilan como herramientas esenciales que empoderan a los educadores y estudiantes para explorar, comprender y aplicar los principios matemáticos de manera efectiva y significativa.

1.3.3. Aplicaciones interactivas

De acuerdo con Enríquez (2020), las aplicaciones interactivas han revolucionado la manera en que los estudiantes se involucran con los conceptos matemáticos, proporcionando experiencias educativas dinámicas y prácticas. Estas aplicaciones van más allá de la presentación estática de información, ofreciendo un entorno de aprendizaje inmersivo donde los estudiantes pueden experimentar directamente con los principios matemáticos. Ya sea a través de juegos educativos, simulaciones interactivas o ejercicios prácticos, las aplicaciones permiten a los estudiantes explorar conceptos abstractos de manera tangible y contextualizada.

Para Bravo y Hollisch (2022), la esencia fundamental de las aplicaciones interactivas radica en su capacidad para sumergir activamente a los estudiantes en el proceso de aprendizaje matemático. Al proporcionar entornos interactivos, estas aplicaciones van más allá de la pasividad asociada con la enseñanza tradicional, permitiendo a los estudiantes no solo observar, sino también participar activamente en la exploración de conceptos matemáticos. La manipulación de gráficos, la experimentación con variables y la participación en actividades prácticas se convierten en componentes esenciales de este proceso educativo interactivo, brindando a los estudiantes la oportunidad de aplicar directamente los principios matemáticos en un contexto dinámico y estimulante.

Este enfoque práctico tiene un impacto significativo en el aprendizaje al facilitar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos. Al interactuar directamente con los elementos visuales y numéricos, los estudiantes no solo memorizan información, sino que internalizan conceptos y desarrollan una comprensión intuitiva. Además, esta experiencia activa promueve la curiosidad al permitir a los estudiantes explorar y descubrir por sí mismos, y fomenta el pensamiento crítico al desafiarlos a resolver problemas y tomar decisiones en tiempo real. En consecuencia, las aplicaciones interactivas no solo son herramientas educativas, sino también catalizadores para cultivar habilidades cognitivas esenciales y un amor duradero por las matemáticas (Rodríguez, 2020).

Al igual que las otras intervenciones tecnológicas, las aplicaciones interactivas destacan por su capacidad para proporcionar retroalimentación instantánea a los estudiantes. Este aspecto juega un papel fundamental en el proceso de aprendizaje al permitir que los estudiantes ajusten su enfoque y corrijan errores de manera inmediata. La retroalimentación inmediata no solo actúa como una guía para la corrección de errores, sino que también sirve como una herramienta valiosa para reforzar los conceptos matemáticos y consolidar el aprendizaje. Esta rapidez en la retroalimentación contribuye significativamente a un

aprendizaje más eficiente al evitar la persistencia de malentendidos y facilitar una comprensión más precisa y profunda de los conceptos (Bravo y Hollisch, 2022).

En conclusión, las aplicaciones interactivas han surgido como poderosas aliadas en la enseñanza de las matemáticas, redefiniendo la experiencia educativa al proporcionar un entorno dinámico y participativo. La capacidad de involucrar a los estudiantes de manera activa, permitiéndoles manipular gráficos, experimentar con variables y recibir retroalimentación inmediata, ha transformado la forma en que se abordan los conceptos matemáticos. Estas aplicaciones no solo facilitan una comprensión profunda, sino que también fomentan la curiosidad y el pensamiento crítico. Además, la retroalimentación instantánea contribuye a un aprendizaje eficiente y adaptativo, permitiendo a los estudiantes ajustar su enfoque en tiempo real. En un mundo digital en constante evolución, las aplicaciones interactivas no solo han ampliado el acceso a la educación matemática, sino que también han creado un espacio donde la exploración, el descubrimiento y el aprendizaje activo florecen, estableciendo así una base sólida para el desarrollo de habilidades matemáticas y el amor por el aprendizaje a lo largo de la vida.

1.4 Evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje

La evaluación desempeña un papel central y multifacético en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que sirve como una herramienta fundamental para medir el progreso, comprender el nivel de comprensión de los estudiantes y orientar la toma de decisiones pedagógicas. Esta práctica va más allá de simplemente asignar calificaciones; se trata de una herramienta dinámica que proporciona información valiosa para adaptar y mejorar la enseñanza. La evaluación puede adoptar diversas formas, incluyendo exámenes, proyectos, actividades prácticas y retroalimentación continua, cada una de las cuales contribuye a un panorama holístico del rendimiento estudiantil (Cedeño *et al.*, 2020).

En este contexto, la evaluación formativa se erige como un pilar esencial en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que se desarrolla de manera continua durante el transcurso del aprendizaje. Esta modalidad de evaluación ofrece a los educadores la capacidad de realizar ajustes inmediatos en su instrucción, identificando y abordando áreas de dificultad detectadas en tiempo real. Al emplear técnicas como la retroalimentación oportuna y actividades formativas, los educadores pueden entender mejor el progreso individual de cada estudiante, adaptar su enfoque pedagógico y proporcionar intervenciones personalizadas que apoyen el desarrollo de habilidades específicas (Asiú *et al.*, 2021).

Por otro lado, Castañeda (2021) sostiene que la evaluación sumativa, realizada al final de una unidad o curso, desempeña un papel crucial al proporcionar una visión integral del rendimiento de los estudiantes. Esta modalidad de evaluación busca consolidar el aprendizaje acumulado a lo largo de un periodo determinado, ofreciendo una perspectiva holística de los logros y áreas de mejora. Los educadores utilizan esta información para evaluar el dominio de los conceptos clave, identificar patrones de rendimiento y tomar decisiones informadas sobre el progreso general del grupo.

En síntesis, la evaluación en el proceso de enseñanza-aprendizaje representa un componente esencial para medir, comprender y mejorar el rendimiento académico. Tanto la evaluación formativa, que permite ajustes inmediatos durante el aprendizaje, como la evaluación sumativa, que brinda una visión consolidada al final de un periodo, desempeñan roles complementarios en el panorama educativo. Asimismo, la evaluación no solo mide el conocimiento adquirido, sino que también sirve como faro para guiar futuras acciones pedagógicas. Al ofrecer retroalimentación constructiva, identificar áreas de mejora y proporcionar una perspectiva global del rendimiento, la evaluación contribuye al desarrollo integral de los estudiantes y al perfeccionamiento continuo del proceso educativo. En última instancia, una evaluación bien diseñada y aplicada con sensibilidad promueve un entorno educativo que nutre el crecimiento, la autorreflexión y el amor por el aprendizaje a lo largo de la vida.

CAPÍTULO II

ASPECTOS MEDULARES CON RELACIÓN A LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y EL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

La visualización espacial y el razonamiento geométrico han emergido como aspectos medulares en el ámbito de la educación matemática, desempeñando un papel esencial en el desarrollo de habilidades matemáticas fundamentales. La visualización espacial, definida como la capacidad de representar y manipular mentalmente objetos tridimensionales, y el razonamiento geométrico, que implica el pensamiento lógico y deductivo sobre propiedades y relaciones geométricas, constituyen pilares en la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos (Castro, 2023).

Dentro de este contexto, Delgado y Vargas (2019) señalan que las teorías cognitivas juegan un papel fundamental al proporcionar marcos conceptuales para entender cómo los individuos procesan la información visual y aplican el razonamiento espacial. Explorar teorías como la de la representación mental y la dualidad ofrece perspectivas valiosas sobre cómo se forman las imágenes mentales y cómo se especializan los sistemas cognitivos para procesar información visual en el contexto de la visualización espacial.

El razonamiento geométrico, por otro lado, no solo es esencial en la resolución de problemas matemáticos, sino que también tiene aplicaciones prácticas en diversos campos. Su papel en el aprendizaje matemático va más allá de la memorización de teoremas, ya que impulsa el pensamiento crítico y la capacidad de argumentación (Arroyo *et al.*, 2023).

La tecnología ha irrumpido como un catalizador transformador, proporcionando herramientas que no solo enriquecen la visualización espacial, sino que también cambian la forma en que evaluamos estas habilidades. La inclusión de *software* educativo, plataformas en línea y aplicaciones interactivas ha ampliado las posibilidades de enseñanza y evaluación, ofreciendo entornos dinámicos que desafían a los estudiantes a aplicar su comprensión espacial en contextos prácticos (Torres *et al.*, 2022).

Este análisis introductorio destaca la interconexión de estos aspectos medulares en el ámbito de la educación matemática, donde la visualización espacial, el razonamiento geométrico y la integración de tecnología se entrelazan para potenciar el aprendizaje y la evaluación de habilidades matemáticas fundamentales.

2.1. Definiciones de visualización espacial y razonamiento geométrico

Según Castro (2023), la visualización espacial y el razonamiento geométrico son dos pilares fundamentales en el ámbito de las matemáticas, pues desempeñan un papel crucial en la comprensión y aplicación de conceptos geométricos. La visualización espacial se refiere a la habilidad cognitiva de representar y manipular mentalmente objetos tridimensionales, permitiendo la imaginación y conceptualización de formas y relaciones en el espacio. Por otro lado, el razonamiento geométrico implica la capacidad de pensar de manera lógica y deductiva sobre propiedades y relaciones geométricas, aplicándose al análisis de formas, dimensiones y configuraciones en el espacio. Ambas competencias son esenciales en la resolución de problemas matemáticos, y encuentran aplicaciones prácticas en diversos contextos de la vida cotidiana y profesional.

Para empezar, la visualización espacial representa una capacidad mental esencial que va más allá de la simple percepción visual. Se trata de la habilidad cognitiva de construir representaciones mentales tridimensionales, permitiendo

a individuos imaginar y conceptualizar objetos y relaciones en el espacio, incluso cuando dichos elementos no están presentes físicamente. En el contexto de disciplinas como las matemáticas y las ciencias, la visualización espacial desempeña un papel fundamental al facilitar la comprensión de conceptos geométricos, como la proyección de figuras en el plano, la rotación de objetos tridimensionales y la visualización de transformaciones espaciales. Esta habilidad va más allá del ámbito académico, impactando también en la resolución de problemas cotidianos, la navegación eficiente y la manipulación habilidosa de objetos en el entorno tridimensional (Carranza *et al.*, 2023).

Desarrollar la visualización espacial no solo enriquece la experiencia académica al mejorar la resolución de problemas geométricos, además contribuye a desarrollar habilidades prácticas que tienen aplicaciones tangibles en la vida diaria. La capacidad de visualizar y manipular objetos mentalmente no solo es fundamental en la interpretación de gráficos y diagramas, sino que también se traduce en destrezas valiosas, como orientarse en el espacio, comprender mapas y planificar eficientemente movimientos y acciones. En conjunto, la visualización espacial es una competencia cognitiva que trasciende disciplinas, enriqueciendo tanto el pensamiento abstracto como las habilidades prácticas esenciales para la navegación y la manipulación exitosa de nuestro entorno tridimensional (Delgado y Vargas, 2019).

Para finalizar, Arroyo *et al.* (2023) sostienen que el razonamiento geométrico representa una faceta fundamental del pensamiento lógico y deductivo, centrado en la comprensión y análisis de propiedades y relaciones geométricas. Este tipo de razonamiento se despliega al examinar formas, dimensiones, ángulos y configuraciones en el espacio, permitiendo a los individuos llegar a conclusiones fundamentadas y coherentes sobre teoremas y proposiciones geométricas. Aquellos que desarrollan un razonamiento geométrico sólido son capaces de abordar desafíos matemáticos de manera efectiva y demuestran habilidades transferibles en la resolución de problemas cotidianos.

Además, este tipo de razonamiento no se limita al ámbito académico, sino que se extiende a numerosos aspectos de la vida diaria y del ámbito profesional. Desde la planificación arquitectónica hasta la resolución de problemas de ingeniería, el razonamiento geométrico juega un papel esencial en la toma de decisiones fundamentadas y en la comprensión profunda de la estructura y las propiedades de las figuras geométricas. Asimismo, en campos como la cartografía, la informática gráfica y la fabricación, el razonamiento geométrico se convierte en una habilidad crucial. En definitiva, el desarrollo del razonamiento geométrico potencia la capacidad de abordar desafíos matemáticos complejos, a la vez que promueve una habilidad valiosa y aplicable en diversos contextos de la vida cotidiana y profesional (Falconi-Procet, 2021).

Por todo ello, la visualización espacial y el razonamiento geométrico emergen como habilidades cruciales en el ámbito matemático y más allá. La capacidad de visualizar y manipular objetos tridimensionales mentalmente, así como el razonamiento lógico aplicado a propiedades geométricas, son fundamentales para abordar desafíos matemáticos complejos y tienen impactos significativos en la resolución de problemas prácticos en la vida cotidiana y en diversas disciplinas profesionales. Estas competencias no solo enriquecen la comprensión de conceptos geométricos, sino que también potencian la toma de decisiones fundamentadas en campos que van desde la arquitectura hasta la ingeniería. Al considerar la importancia de la visualización espacial y el razonamiento geométrico, se revela su papel esencial en el desarrollo de habilidades matemáticas y su influencia en la forma en que interactuamos con el mundo que nos rodea.

2.2. Teorías cognitivas relacionadas con la visualización espacial

Las teorías cognitivas relacionadas con la visualización espacial se centran en comprender cómo el cerebro humano procesa y utiliza información visual para crear representaciones mentales de objetos tridimensionales y sus

relaciones en el espacio. En el ámbito de la visualización espacial, la teoría de la representación mental desempeña un papel central al explicar cómo los individuos organizan y procesan información visual para construir imágenes mentales de objetos y escenas. Según esta teoría cognitiva, las personas utilizan representaciones internas o mentales para modelar estructuras tridimensionales en su mente, permitiéndoles manipular y comprender dichas estructuras incluso cuando no están presentes físicamente. Esta capacidad de crear imágenes mentales contribuye significativamente a la visualización espacial, ya que posibilita la conceptualización y la manipulación de formas y relaciones en el espacio. La teoría de la representación mental sugiere que estas representaciones internas son esenciales para la comprensión profunda de conceptos geométricos, como proyecciones, rotaciones y transformaciones espaciales, y son utilizadas de manera activa en la resolución de problemas matemáticos y tareas espaciales (Aguilar-Salinas *et al.*, 2021).

En la práctica, la teoría de la representación mental tiene implicaciones pedagógicas importantes, ya que destaca la importancia de cultivar y desarrollar la capacidad de crear representaciones internas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Estrategias que fomentan la construcción activa de imágenes mentales, como el uso de modelos visuales y la resolución de problemas con enfoque espacial, pueden fortalecer la visualización espacial y mejorar la capacidad de los individuos para enfrentar desafíos geométricos de manera más efectiva. En conjunto, la teoría de la representación mental proporciona un marco conceptual valioso para comprender cómo se desarrolla y se utiliza la visualización espacial en el ámbito cognitivo y educativo (Ramírez *et al.*, 2023).

A su vez, Rangel-Luengas y De Losada (2022) resaltan que la teoría de la dualidad en el procesamiento visual propone una distinción entre dos sistemas cognitivos especializados, cada uno cumpliendo funciones específicas en relación con la visualización espacial. El primero de estos sistemas se especializa en el reconocimiento de objetos, permitiendo a los individuos identificar y clasificar elementos visuales en su entorno. El segundo sistema está dedicado a

la navegación espacial y a la manipulación mental de objetos tridimensionales. Ambos sistemas trabajan en concierto para facilitar una visualización espacial eficiente, ya que el reconocimiento de objetos proporciona la base para la construcción de representaciones mentales, y el sistema especializado en navegación espacial permite la manipulación y comprensión de estas representaciones en el espacio tridimensional.

Esta teoría tiene importantes implicaciones para entender cómo las personas interactúan con su entorno visual y de qué manera procesan información espacialmente. En términos educativos, reconocer la dualidad en estos sistemas cognitivos sugiere que la instrucción eficaz en visualización espacial debe abordar tanto el reconocimiento de objetos como la manipulación espacial, integrando estrategias que fortalezcan ambos aspectos. La teoría de la dualidad proporciona una perspectiva valiosa sobre la complejidad del procesamiento visual y destaca la necesidad de enfoques educativos que consideren la interacción dinámica entre estos dos sistemas cognitivos especializados en la visualización espacial (Uribe y Retamal, 2021).

Por otro lado, la teoría de la imagen dual, en el contexto de la visualización espacial, plantea la intrigante idea de que el cerebro puede generar representaciones mentales separadas para distintos atributos visuales, como forma y color, para luego integrar estas representaciones en una imagen mental completa. Este enfoque sugiere que el cerebro descompone la información visual en diversas características antes de unir las para formar una representación coherente del espacio tridimensional. Esta teoría destaca la complejidad y la capacidad adaptativa del procesamiento visual, permitiendo una percepción más detallada y específica de elementos espaciales al descomponer y fusionar aspectos visuales individuales (Rangel-Luengas y De Losada, 2022).

Desde una perspectiva educativa, Ichaso (2017) señala que la teoría de la imagen dual subraya la importancia de abordar la visualización espacial de manera holística, reconociendo la diversidad de atributos que componen una

representación mental. Estrategias pedagógicas que integren la diversidad visual, como el uso de herramientas multimedia, modelos tridimensionales y actividades prácticas, pueden favorecer el desarrollo de habilidades de visualización espacial al abordar la dualidad de la información visual. La comprensión de esta teoría ofrece valiosas perspectivas sobre cómo el cerebro organiza y sintetiza información visual compleja, lo que tiene implicaciones significativas en la mejora de enfoques educativos centrados en la visualización espacial.

En resumen, las teorías cognitivas relacionadas con la visualización espacial ofrecen una ventana fascinante hacia la complejidad de cómo el cerebro humano procesa y utiliza información visual en la formación de representaciones mentales tridimensionales. Desde la teoría de la representación mental, que destaca la construcción activa de imágenes mentales, hasta la teoría de la dualidad y la teoría de la imagen dual, que exploran la especialización y la integración de sistemas cognitivos en el procesamiento visual, estas perspectivas teóricas enriquecen nuestra comprensión de cómo los individuos visualizan y manipulan objetos en el espacio. Estas teorías no solo tienen relevancia en el ámbito académico, influyendo en enfoques pedagógicos para mejorar la visualización espacial, sino que también tienen implicaciones más amplias en campos como la neurociencia y la psicología cognitiva. Al profundizar en estas teorías, se abre la puerta a estrategias educativas más efectivas y a una apreciación más rica de la extraordinaria capacidad del cerebro para entender y navegar el mundo visualmente tridimensional.

2.3. Razonamiento geométrico y su rol en el aprendizaje matemático

El razonamiento geométrico, esencial en el aprendizaje matemático, representa una forma distintiva de pensamiento lógico y deductivo centrada en la comprensión y análisis de formas, dimensiones y configuraciones en el espacio. Su papel es trascendental en la construcción de un conocimiento matemático sólido y enriquecedor. A través del razonamiento geométrico, los estudiantes

no solo desarrollan habilidades analíticas al abordar teoremas y propiedades geométricas, sino que también cultivan la capacidad de argumentar de manera coherente sobre las relaciones espaciales (Labra y Vanegas, 2022).

Este tipo de razonamiento no se limita a la resolución de problemas matemáticos; además, tiene una presencia tangible en la vida cotidiana y en diversas disciplinas profesionales. Desde la planificación arquitectónica hasta la resolución de problemas de ingeniería, el razonamiento geométrico se convierte en una herramienta fundamental para comprender y abordar desafíos prácticos. Asimismo, el razonamiento geométrico fomenta la creatividad y la intuición matemática al permitir a los estudiantes visualizar y conceptualizar situaciones espaciales de manera más profunda (Berciano, 2022).

Castro (2022) señala que cultivar el razonamiento geométrico en el aula implica no solo la presentación de conceptos y teoremas, sino también la promoción de actividades que desafíen a los estudiantes a pensar de manera crítica y a aplicar sus conocimientos geométricos en contextos diversos. Al integrar el razonamiento geométrico en la enseñanza matemática, se establece una base sólida para el desarrollo integral de habilidades matemáticas y la preparación para enfrentar problemas tanto académicos como del mundo real.

En conclusión, el razonamiento geométrico emerge como un pilar fundamental en el aprendizaje matemático, proporcionando a los estudiantes una herramienta invaluable para comprender, analizar y resolver problemas espaciales y geométricos. Más allá de ser un componente esencial en la adquisición de conocimientos matemáticos, el razonamiento geométrico también despierta la creatividad y fomenta la capacidad de visualización, habilidades cruciales en el ámbito académico y en la vida cotidiana. Al cultivar el razonamiento geométrico en el aula, se promueve un enfoque integral hacia la matemática, preparando a los estudiantes para abordar desafíos tanto abstractos como prácticos. Esta habilidad no solo se traduce en un sólido entendimiento de con-

ceptos geométricos, sino que a su vez potencia la resolución de problemas en campos tan diversos como la arquitectura o la ingeniería. En última instancia, el razonamiento geométrico es tanto una herramienta académica valiosa como un vehículo que impulsa la exploración, el descubrimiento y la aplicación de principios matemáticos en el mundo que nos rodea.

2.4. Tecnología y visualización espacial

Según Suárez *et al.* (2018), la inclusión de la tecnología en la enseñanza ha transformado significativamente la forma en que los estudiantes desarrollan habilidades de visualización espacial. Las herramientas tecnológicas, como *software* educativo, aplicaciones interactivas y simulaciones tridimensionales, ofrecen a los educadores y estudiantes recursos poderosos para explorar y comprender conceptos geométricos de manera más dinámica. Estas herramientas proporcionan representaciones visuales interactivas que permiten a los estudiantes manipular objetos, observar transformaciones y experimentar con conceptos espaciales en entornos virtuales.

El *software* educativo, por ejemplo, brinda la flexibilidad de presentar modelos tridimensionales y visualizaciones geométricas de manera accesible. Las plataformas en línea ofrecen actividades interactivas que desafían a los estudiantes a aplicar su visualización espacial en la resolución de problemas. Al igual que las aplicaciones interactivas, que permiten a los estudiantes explorar conceptos geométricos de manera práctica, mientras que simulaciones tridimensionales facilitan la comprensión de estructuras espaciales complejas (Bolaños *et al.*, 2020).

La integración de la tecnología en la enseñanza no solo tiene que ver con proporcionar acceso a recursos visuales enriquecedores, sino con impulsar un cambio fundamental hacia un aprendizaje más participativo y centrado en el estudiante. Al incorporar herramientas tecnológicas, los educadores pueden

diseñar entornos de aprendizaje que involucren activamente a los estudiantes, permitiéndoles explorar y experimentar con conceptos geométricos de manera interactiva. Esta participación activa no solo mejora la retención del conocimiento, sino que también nutre el desarrollo de habilidades de visualización espacial, ya que los estudiantes pueden interactuar directamente con modelos tridimensionales y visualizaciones geométricas (Gómez-Tone, 2019).

Además, Bolaños *et al.* (2020) sostienen que la tecnología sirve como un catalizador para fomentar una comprensión más profunda y aplicada de los conceptos geométricos. A través de simulaciones y actividades interactivas, los estudiantes pueden enfrentarse a desafíos matemáticos de manera práctica, conectando los conceptos abstractos con situaciones del mundo real. La tecnología, en este sentido, no solo proporciona herramientas visuales, sino que se convierte en un aliado valioso para cultivar y fortalecer la visualización espacial en el proceso educativo, preparando a los estudiantes para aplicar sus conocimientos en contextos prácticos y desafíos del mundo real.

En conclusión, la integración de la tecnología como herramienta pedagógica para la visualización espacial no solo abre nuevas dimensiones de acceso a experiencias visuales y modelos tridimensionales enriquecedores, sino que también redefine la dinámica del aprendizaje hacia un enfoque más participativo y centrado en el estudiante. Al aprovechar estas herramientas tecnológicas, se promueve el desarrollo efectivo de habilidades de visualización espacial y se prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos y aplicar sus conocimientos en contextos del mundo real de manera más profunda y significativa. La tecnología, al convertirse en un aliado valioso en el proceso educativo, contribuye a potenciar la comprensión espacial de los estudiantes, estableciendo un puente entre la teoría y la aplicación práctica de los conceptos geométricos en su trayectoria educativa y más allá.

2.5. Evaluación de la visualización espacial y razonamiento geométrico

Como sostiene Castro (2023), la evaluación de la visualización espacial y el razonamiento geométrico constituye una parte fundamental en la comprensión del progreso de los estudiantes en el ámbito matemático. Dada la naturaleza única de estas habilidades, las estrategias de evaluación deben ir más allá de simples pruebas escritas y abordar la capacidad de los estudiantes para conceptualizar y manipular objetos en el espacio tridimensional. Las evaluaciones pueden incluir la resolución de problemas geométricos que requieran la aplicación de razonamiento espacial, la representación visual de conceptos geométricos y la interpretación de modelos tridimensionales.

Para Falconi-Procel (2021), las herramientas tecnológicas, al proporcionar oportunidades valiosas para la evaluación de la visualización espacial, abren un abanico de posibilidades interactivas que desafían a los estudiantes a aplicar su comprensión espacial en contextos prácticos y dinámicos. Las simulaciones y aplicaciones interactivas no solo permiten a los estudiantes interactuar con objetos virtuales, sino que también ofrecen a los educadores datos detallados sobre cómo los estudiantes manipulan estas representaciones digitales. Al observar cómo los estudiantes realizan transformaciones espaciales y comprenden relaciones geométricas complejas en entornos virtuales, los educadores pueden obtener *insights* valiosos sobre las fortalezas y áreas de desarrollo de las habilidades de visualización espacial de cada estudiante.

Este enfoque de evaluación tecnológicamente enriquecido no solo proporciona una perspectiva más profunda sobre las habilidades de visualización espacial de los estudiantes, sino que también permite una retroalimentación más inmediata y personalizada. Los resultados obtenidos de estas herramientas pueden informar a los educadores sobre las estrategias de enseñanza más efec-

tivas y guiar la adaptación del plan de estudios para abordar específicamente las necesidades individuales de los estudiantes en el desarrollo de sus habilidades de visualización espacial (Castro, 2023).

En el caso del razonamiento geométrico, las evaluaciones pueden incluir la presentación de problemas que requieran la aplicación de teoremas y la construcción de argumentos lógicos en un formato visual. La capacidad de los estudiantes para explicar y justificar sus soluciones, así como para aplicar conceptos geométricos en situaciones del mundo real, también puede ser evaluada de manera efectiva (Barreto-Salinas *et al.*, 2021).

En resumen, la evaluación de la visualización espacial y el razonamiento geométrico desempeña un papel crucial en la comprensión del progreso matemático de los estudiantes. La diversidad de estrategias evaluativas, que van desde la resolución de problemas geométricos hasta la interpretación de modelos tridimensionales y la aplicación de conceptos en situaciones del mundo real, refleja la naturaleza integral de estas habilidades. La incorporación de herramientas tecnológicas en la evaluación proporciona un enfoque dinámico que permite obtener información detallada sobre la capacidad de los estudiantes para conceptualizar y manipular objetos en el espacio. Al adoptar un enfoque integral y adaptativo en la evaluación de la visualización espacial y el razonamiento geométrico, se fomenta una comprensión más completa y precisa del desarrollo de estas habilidades, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos y aplicar su conocimiento en contextos diversos.

CAPÍTULO III

FUNDAMENTOS CENTRALES EN TORNO AL MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA

En el ámbito de la enseñanza de la geometría, la convergencia entre el modelo Van Hiele y GeoGebra representa un paradigma educativo innovador que profundiza la comprensión geométrica de los estudiantes a través de un enfoque estructurado y tecnológicamente avanzado (Antezana *et al.*, 2020). Los fundamentos centrales de esta sinergia se sustentan en la conceptualización del modelo Van Hiele, un marco teórico desarrollado por los educadores Dina y Pierre Van Hiele en la década de 1950. Este modelo categoriza el proceso de aprendizaje geométrico en cinco niveles distintos, desde la percepción visual hasta la capacidad de abstracción y deducción, proporcionando así una guía escalonada para el desarrollo cognitivo de los estudiantes (Chavarría-Pallarco, 2020).

Asimismo, Arteaga *et al.* (2019) plantean que introducir GeoGebra como herramienta en este contexto es esencial. GeoGebra destaca como una plataforma dinámica y versátil que permite a los estudiantes interactuar con conceptos geométricos de manera visual y activa. Dicha plataforma también ofrece representaciones gráficas en tiempo real, posibilitando la manipulación y exploración de construcciones geométricas de manera interactiva. En este marco, los niveles en el modelo Van Hiele se convierten en escalones para avanzar hacia una comprensión más profunda, y GeoGebra actúa como un facilitador que permite a los estudiantes trascender cada nivel de manera gradual.

La implementación del modelo Van Hiele con GeoGebra no solo mejora la experiencia de aprendizaje, sino que también proporciona ventajas significativas. GeoGebra se adapta a cada nivel del modelo Van Hiele, ofreciendo un entorno interactivo y personalizable que estimula la exploración activa y la experimentación. Estas ventajas promueven una enseñanza de la geometría más efectiva, personalizada y significativa, permitiendo a los estudiantes avanzar en su comprensión de los conceptos geométricos de manera fluida y progresiva (Moreno-Moyano, 2024).

En síntesis, la integración del modelo Van Hiele y GeoGebra en la enseñanza de la geometría marca una evolución significativa en los enfoques pedagógicos. Al combinar la estructura teórica progresiva del modelo Van Hiele con la dinámica plataforma interactiva de GeoGebra, se crea un entorno educativo que potencia la exploración activa y la comprensión profunda de los conceptos geométricos. Esta sinergia no solo enriquece la experiencia de aprendizaje, sino que también optimiza la evaluación continua del progreso individual, permitiendo a los educadores adaptar sus enfoques según las necesidades específicas de cada estudiante. Al impulsar la transición fluida entre niveles cognitivos y ofrecer una herramienta versátil para la experimentación, esta combinación estratégica redefine la enseñanza de la geometría, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos con confianza y solidez conceptual. En última instancia, la convergencia entre el modelo Van Hiele y GeoGebra destaca el potencial transformador de la tecnología en la educación matemática, y proporciona un camino hacia un aprendizaje más significativo y adaptativo en el ámbito de la geometría.

3.1. Conceptualización sobre el modelo Van Hiele

Según Chavarría-Pallarco (2020), el modelo Van Hiele, concebido por Dina y Pierre Van Hiele en la década de 1950, emerge como un marco teórico fundamental para desentrañar el complejo proceso de aprendizaje en geome-

tría. Este enfoque conceptualiza el desarrollo cognitivo de los estudiantes en cinco niveles progresivos, conocidos como los niveles de Van Hiele, delineando etapas específicas en la adquisición de conocimientos geométricos. Inicia en la percepción visual, donde los estudiantes identifican y reconocen formas, y se desarrolla gradualmente hacia niveles más avanzados que involucran la clasificación, la relación de propiedades, la deducción lógica y, finalmente, la capacidad de abstracción y generalización.

Cada nivel en el modelo representa un hito en el viaje del estudiante hacia una comprensión más profunda de la geometría, destacando la importancia de transmitir información geométrica y de guiar a los estudiantes a través de un proceso estructurado de desarrollo cognitivo. La riqueza de este modelo radica en su capacidad para orientar a los educadores en la adaptación de estrategias pedagógicas según las necesidades cognitivas específicas de los estudiantes en cada nivel, promoviendo así un aprendizaje geométrico más efectivo y contextualizado (Sarrín, 2019).

Remolina-Delgado (2021) señala que en el primer nivel, los estudiantes se centran en la identificación visual de formas y figuras. A medida que avanzan, el segundo nivel implica la clasificación de las formas según sus propiedades. En el tercer nivel, los estudiantes comienzan a relacionar las propiedades de las figuras, desarrollando conexiones más abstractas. El cuarto nivel se centra en la deducción lógica, permitiendo a los estudiantes demostrar teoremas y relaciones geométricas. Finalmente, en el quinto nivel, los estudiantes pueden realizar abstracciones más avanzadas, generalizando conceptos geométricos y aplicándolos a situaciones más complejas.

En este contexto, el modelo Van Hiele destaca la importancia de superar la mera memorización de definiciones y teoremas en el aprendizaje de la geometría, proponiendo un enfoque más estructurado y progresivo que se centra en la comprensión de las propiedades y relaciones geométricas. Al reconocer

que los estudiantes atraviesan distintos niveles de desarrollo cognitivo, desde la simple percepción visual hasta la capacidad de realizar abstracciones complejas, este modelo proporciona un marco valioso para los educadores. La adaptación de los enfoques de enseñanza de acuerdo con los niveles de Van Hiele permite a los educadores personalizar sus métodos para satisfacer las necesidades específicas de los estudiantes en cada etapa de su desarrollo. Al hacerlo, se fomenta una comprensión más profunda y significativa de la geometría, ya que los estudiantes avanzan de manera gradual y estructurada hacia niveles más altos de pensamiento geométrico (Falconi-Procel, 2021).

Al respecto, Estrada *et al.* (2021) señalan que esta comprensión progresiva no solo fortalece la base conceptual de los estudiantes en geometría, sino que también promueve la capacidad de aplicar sus conocimientos en contextos más amplios. El modelo Van Hiele, al ser implementado eficazmente por los educadores, se convierte en una herramienta valiosa para cultivar una apreciación más profunda de la geometría, contribuyendo a un aprendizaje matemático más integral y significativo.

En conclusión, el modelo Van Hiele se erige como un marco teórico esclarecedor que ha perdurado en el tiempo, ofreciendo una conceptualización profunda del proceso de aprendizaje en geometría. Desde su desarrollo por Dina y Pierre Van Hiele en la década de 1950, este modelo ha guiado la enseñanza de la geometría al resaltar la importancia de no solo transmitir conocimientos geométricos, sino también de guiar a los estudiantes a través de niveles progresivos de desarrollo cognitivo. Al reconocer que el aprendizaje geométrico no es un proceso uniforme, sino que implica etapas específicas desde la percepción visual hasta la abstracción, el modelo Van Hiele ha proporcionado un marco valioso para adaptar estrategias pedagógicas y nutrir una comprensión más profunda y significativa de la geometría. Su legado perdurable continúa influyendo en la enseñanza de las matemáticas, recordando la importancia de

abordar el aprendizaje no solo como una acumulación de hechos, sino como un viaje estructurado hacia la comprensión y aplicación matemáticas.

3.2. Introducción a GeoGebra como herramienta para la enseñanza de geometría

La introducción de aplicaciones interactivas en la enseñanza de la geometría marca un hito significativo en la transformación educativa. Estas herramientas, como GeoGebra y otras plataformas similares, ofrecen a educadores y estudiantes la posibilidad de explorar conceptos geométricos de manera dinámica y participativa. A través de estas aplicaciones, los estudiantes pueden interactuar con objetos geométricos, experimentar con construcciones y observar las repercusiones instantáneas de sus acciones. Este enfoque activo no solo estimula el interés de los estudiantes, sino que también fortalece su comprensión conceptual al permitirles visualizar y manipular abstractos geométricos de manera tangible. Las aplicaciones interactivas, al integrar la tecnología de manera fluida en el aula, abren nuevas posibilidades para una enseñanza de la geometría más dinámica, accesible y adaptada a las necesidades individuales de los estudiantes (Arteaga *et al.*, 2019).

Para Moreno-Moyano (2024), GeoGebra es una herramienta matemática dinámica y versátil que se destaca como un recurso excepcional para la enseñanza de la geometría en entornos educativos. Esta plataforma interactiva ofrece a educadores y estudiantes la capacidad de explorar conceptos geométricos de manera visual y dinámica, permitiendo la construcción de figuras, el cambio de parámetros y la observación inmediata de las implicaciones de tales modificaciones. Asimismo, GeoGebra integra geometría, álgebra, cálculo y otras áreas matemáticas en un entorno interactivo, lo que facilita la conexión entre distintos conceptos y fortalece la comprensión integral de la geometría.

De acuerdo con Cenas *et al.* (2021), una característica distintiva de GeoGebra reside en su capacidad para proporcionar representaciones gráficas y

dinámicas en tiempo real, transformando la manera en que los estudiantes abordan la geometría. Al permitir a los estudiantes manipular directamente objetos geométricos en la pantalla, experimentar con construcciones y observar las consecuencias de sus acciones de manera instantánea, GeoGebra promueve un aprendizaje activo y participativo. Esta interactividad no solo catapulta el nivel de compromiso de los estudiantes, sino que también contribuye a una comprensión más profunda de los conceptos geométricos al facilitar la exploración y la experimentación directa.

La capacidad de los estudiantes para interactuar directamente con los elementos geométricos a través de GeoGebra no solo fomenta el descubrimiento individual, sino que también facilita la comprensión colectiva a medida que los estudiantes comparten sus construcciones y exploran propiedades geométricas en colaboración. Este enfoque dinámico y participativo no solo enriquece el proceso de aprendizaje, sino que también refleja la forma en que la tecnología puede transformar la enseñanza de la geometría, convirtiéndola en una experiencia más accesible y cautivadora para los estudiantes (Moreno-Moyano, 2024).

Además de proporcionar a los estudiantes una experiencia interactiva en tiempo real, GeoGebra ofrece a los educadores una herramienta versátil para diseñar actividades personalizadas. Esta capacidad para adaptar las lecciones a los niveles y necesidades específicas de los estudiantes facilita un enfoque diferenciado, permitiendo a los educadores abordar las diversas habilidades y estilos de aprendizaje presentes en el aula. Los profesores pueden diseñar tareas específicas que desafíen a los estudiantes a explorar conceptos geométricos de manera individual o colaborativa, adaptando la complejidad según el progreso de cada estudiante. Este enfoque centrado en el estudiante promueve un aprendizaje más significativo y personalizado, ya que los estudiantes pueden abordar la geometría de manera que se ajuste a sus necesidades y niveles de comprensión (Morales *et al.*, 2023).

Conforme con Rodríguez *et al.* (2021), con su interfaz intuitiva y una amplia gama de funciones, GeoGebra se convierte en un aliado valioso en el aula. La herramienta no solo facilita la creación de contenido interactivo, sino que también simplifica la presentación y la visualización de conceptos geométricos de manera clara y dinámica. La combinación de personalización y accesibilidad hace de GeoGebra una herramienta efectiva para potenciar la enseñanza de la geometría, generando un entorno educativo más interactivo y eficaz.

En conclusión, GeoGebra emerge como una herramienta pedagógica invaluable para la enseñanza de la geometría, transformando la experiencia de aprendizaje de estudiantes y educadores por igual. Su capacidad para proporcionar representaciones gráficas y dinámicas en tiempo real, junto con la posibilidad de personalizar actividades adaptadas a las necesidades individuales, redefinen la forma en que se abordan los conceptos geométricos en el aula. GeoGebra no solo potencia la comprensión profunda de la geometría a través de la exploración activa, sino que también fomenta un enfoque diferenciado y centrado en el estudiante. Con su interfaz intuitiva y funciones versátiles, GeoGebra se erige como un aliado valioso, haciendo que la enseñanza de la geometría sea más accesible, interactiva y efectiva, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos con confianza y comprensión.

3.3. Niveles en el modelo Van Hiele

Para Remolina-Delgado (2021), el modelo Van Hiele propone una estructura jerárquica de niveles para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes en el aprendizaje de la geometría. Estos niveles, creados por Dina y Pierre Van Hiele, representan distintas etapas en la adquisición de conocimientos geométricos y la capacidad de comprender conceptos abstractos. A continuación, se describen brevemente los cinco niveles en el modelo Van Hiele:

Nivel de visualización (percepción)

Chavarría-Pallarco (2020) sostiene que, en este nivel, los estudiantes se enfocan en la identificación visual de formas y figuras. Pueden reconocer y nombrar objetos geométricos, pero su comprensión se limita a la percepción visual sin profundizar en las propiedades o relaciones entre ellos.

Nivel de análisis (clasificación)

Para Antezana *et al.* (2020), los estudiantes comienzan a clasificar formas según sus propiedades, a la vez que empiezan a ver similitudes y diferencias, pero su pensamiento aún se centra en las características externas y no en las relaciones más profundas.

Nivel de abstracción (relación)

De acuerdo con Remolina-Delgado (2021), en este nivel los estudiantes comienzan a establecer relaciones entre las propiedades de las figuras geométricas. Pueden entender las conexiones abstractas y lógicas entre conceptos, avanzando más allá de la simple clasificación.

Nivel de deducción (deducción lógica)

Los estudiantes desarrollan la capacidad de realizar deducciones lógicas y demostrar teoremas. Se centran en la aplicación de reglas lógicas para justificar y demostrar propiedades geométricas (Antezana *et al.*, 2020).

Nivel de abstracción superior (abstracción compleja)

En este nivel, los estudiantes son capaces de realizar abstracciones más avanzadas y generalizaciones. Pueden aplicar conceptos geométricos en situaciones complejas y resolver problemas más abstractos (Castro, 2023).

En resumen, los niveles en el modelo Van Hiele constituyen un marco teórico esencial que ilustra de manera estructurada el desarrollo cognitivo de los estudiantes en el aprendizaje de la geometría. Desde la percepción visual inicial hasta la capacidad de realizar abstracciones complejas, estos niveles

ofrecen una guía valiosa para educadores al adaptar estrategias pedagógicas según el nivel de desarrollo de cada estudiante. Al reconocer la importancia de construir gradualmente la comprensión geométrica, el modelo Van Hiele proporciona una herramienta esencial para promover un aprendizaje significativo y adaptado a las necesidades individuales, destacando la complejidad inherente de la adquisición de conocimientos geométricos y la importancia de abordarla de manera progresiva y estructurada.

3.4. Implementación del modelo Van Hiele con GeoGebra

La implementación del modelo Van Hiele con GeoGebra representa una sinergia poderosa entre un marco teórico sólido y una herramienta tecnológica dinámica. GeoGebra, al proporcionar capacidades interactivas y visuales en tiempo real, se alinea naturalmente con la progresión cognitiva delineada en los niveles del modelo Van Hiele. Comenzando con el nivel de visualización, GeoGebra permite a los estudiantes explorar y manipular figuras geométricas, estableciendo una base visual para el aprendizaje (Antezana *et al.*, 2020).

Según Moreno-Moyano (2024), a medida que los estudiantes avanzan en los niveles del modelo Van Hiele, GeoGebra se erige como una herramienta adaptable que facilita la transición hacia niveles superiores de abstracción y deducción en el aprendizaje de la geometría. Los educadores pueden aprovechar la versatilidad de GeoGebra para diseñar actividades personalizadas que desafíen a los estudiantes a clasificar, relacionar y deducir propiedades geométricas, todo ello inmersos en un entorno interactivo. La capacidad de GeoGebra para visualizar conceptos abstractos y permitir la manipulación dinámica de construcciones geométricas no solo estimula la participación activa, sino que también facilita la comprensión profunda de relaciones geométricas más complejas, propiciando un aprendizaje más significativo y contextualizado.

En este contexto, GeoGebra se convierte en un aliado valioso para los educadores, ya que ofrece una plataforma dinámica que presenta conceptos geométricos abstractos de manera tangible, y promueve la exploración activa y la experimentación, elementos cruciales para el avance en los niveles del modelo Van Hiele. Esta adaptabilidad y capacidad de GeoGebra para alinearse con la progresión cognitiva delineada en el modelo brindan a los estudiantes una experiencia de aprendizaje geométrico más rica y a los educadores una herramienta efectiva para guiarlos hacia niveles superiores de comprensión (Collazos *et al.*, 2023).

Por consiguiente, Antezana *et al.* (2020) sostienen que la implementación de GeoGebra en el contexto del modelo Van Hiele no solo enriquece la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, sino que también se convierte en una herramienta invaluable para los educadores al evaluar el progreso de los estudiantes a través de los distintos niveles de desarrollo cognitivo. GeoGebra proporciona a los docentes herramientas flexibles y dinámicas que les permiten diseñar actividades alineadas con los objetivos de cada nivel del modelo Van Hiele. La capacidad de GeoGebra para registrar las interacciones de los estudiantes con las construcciones geométricas permite a los educadores evaluar no solo los resultados finales, sino también el proceso de pensamiento y la comprensión conceptual detrás de cada actividad.

Esta integración efectiva entre teoría y tecnología destaca cómo la implementación cuidadosa de GeoGebra puede potenciar el desarrollo geométrico de los estudiantes. La herramienta facilita la transición fluida entre niveles y fortalece la comprensión de la geometría al proporcionar un entorno interactivo que estimula la exploración activa y la experimentación. En última instancia, GeoGebra se posiciona como un catalizador que guía a los estudiantes de manera efectiva a través de las etapas del modelo Van Hiele, ofreciendo a los educadores una perspectiva profunda sobre el progreso individual y promoviendo una comprensión más completa y significativa de los conceptos geométricos (Cuervo *et al.*, 2021).

En conclusión, la implementación del modelo Van Hiele con GeoGebra representa una fusión exitosa entre la teoría educativa y la tecnología innovadora. Esta colaboración permite no solo enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, sino también empoderar a los educadores con una herramienta poderosa para evaluar y guiar el progreso a través de los niveles cognitivos. En este sentido, GeoGebra facilita la transición fluida entre las etapas del modelo Van Hiele, ofreciendo un entorno interactivo que estimula la exploración y la comprensión profunda de la geometría. La integración cuidadosa de esta herramienta en el aula fortalece el desarrollo geométrico de los estudiantes, a la vez que destaca el potencial transformador de la tecnología para mejorar y personalizar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el ámbito de la geometría.

3.5. Ventajas de combinar el modelo Van Hiele y GeoGebra

De acuerdo con Castro (2023), la combinación del modelo Van Hiele y GeoGebra presenta ventajas significativas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría. En primer lugar, la estructura jerárquica del modelo Van Hiele proporciona un marco teórico sólido que guía la progresión cognitiva de los estudiantes, desde la percepción visual hasta la capacidad de realizar abstracciones complejas. GeoGebra, por otro lado, complementa este modelo al ofrecer una plataforma interactiva y dinámica que permite a los estudiantes explorar y manipular construcciones geométricas, adaptándose a cada nivel de desarrollo cognitivo.

La integración de GeoGebra con el modelo Van Hiele potencia la comprensión profunda de los conceptos geométricos al proporcionar una experiencia práctica y visualmente estimulante. Los estudiantes pueden pasar de la visualización y manipulación de formas básicas al razonamiento lógico y la deducción, todo dentro de un entorno interactivo. Además, GeoGebra facilita la personalización de actividades según los niveles del modelo Van Hiele,

permitiendo a los educadores adaptar su enfoque para satisfacer las necesidades específicas de cada estudiante. En conjunto, esta combinación estratégica no solo enriquece la experiencia de aprendizaje, sino que también optimiza la evaluación del progreso individual, fomentando un aprendizaje más efectivo y significativo en el ámbito de la geometría (Cuervo *et al.*, 2021).

Por tanto, como se viene desarrollando anteriormente, la implementación conjunta de la teoría y la tecnología fomenta facilidades en el aprendizaje de los estudiantes, con enfoque en las matemáticas. En este contexto, se expone a la herramienta GeoGebra como facilitadora para la exploración activa y la experimentación, elementos esenciales para el fomento de la comprensión geométrica. Los estudiantes pueden manipular objetos geométricos, observar cómo cambian en tiempo real y descubrir relaciones sutiles, lo que fortalece su intuición geométrica. La retroalimentación inmediata proporcionada por GeoGebra permite a los estudiantes ajustar sus enfoques y corregir errores, fomentando así un aprendizaje adaptativo y autónomo (Antezana *et al.*, 2020).

Además, Moreno-Moyano (2024) puntualiza que la combinación de estos enfoques favorece la evaluación formativa y continua del progreso del estudiante. GeoGebra registra las interacciones, proporcionando a los educadores información detallada sobre el proceso de pensamiento y la comprensión conceptual de cada estudiante. Esta retroalimentación en tiempo real informa a los educadores sobre áreas de fortaleza y debilidad, permitiéndoles ajustar la instrucción de manera efectiva.

En conclusión, la combinación estratégica del modelo Van Hiele y GeoGebra emerge como un enfoque pedagógico poderoso y centrado en el estudiante para la enseñanza de la geometría. Al seguir la progresión cognitiva delineada por el modelo Van Hiele, complementada con la dinámica plataforma de GeoGebra, se logra una sinergia que no solo enriquece la experiencia de aprendizaje, sino que también optimiza la evaluación del progreso indivi-

dual. La versatilidad y adaptabilidad de GeoGebra, integradas con la estructura teórica del modelo Van Hiele, propician un entorno educativo que fomenta la exploración activa, la experimentación y el desarrollo progresivo de habilidades geométricas. Esta combinación, a su vez, fortalece la comprensión de los conceptos y estimula el pensamiento crítico y la resolución de problemas, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos con confianza y solidez conceptual. En última instancia, la fusión de estos enfoques potencia una enseñanza de la geometría más efectiva, personalizada y significativa para los estudiantes.

CAPÍTULO IV

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO ORIENTADO POR EL MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA

La estrategia didáctica diseñada para potenciar la visualización espacial y el razonamiento geométrico, bajo la guía del modelo de Van Hiele y la herramienta GeoGebra, se fundamenta en sólidos principios teóricos. El modelo de Van Hiele proporciona una estructura jerárquica de niveles de razonamiento geométrico, estableciendo una base para la progresión cognitiva de los estudiantes. La visualización espacial, conceptualizada como la capacidad de percibir, interpretar y representar objetos tridimensionales, se considera esencial para la comprensión matemática. La integración de GeoGebra como recurso educativo potencia la experiencia visual y la interactividad, proporcionando un entorno dinámico para la exploración de conceptos geométricos. Esta estrategia se alinea con enfoques contemporáneos de enseñanza centrados en el desarrollo de competencias y busca promover un aprendizaje profundo y contextualizado en el ámbito de la geometría (Moreno-Moyano, 2024).

Objetivos

Objetivo general

Diseñar una estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele con el uso del

GeoGebra en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” de Cusco.

Objetivos específicos

Identificar la situación real de la visualización espacial y razonamiento geométrico que poseen los estudiantes del cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” de Cusco, al desarrollar problemas que involucran área, volúmenes de sólidos geométricos.

Determinar las teorías que fundamentan la visualización espacial y razonamiento geométrico para resolver problemas que involucran áreas y volúmenes de sólidos geométricos.

Establecer los criterios en la modelación de la estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele y GeoGebra, tomando como medio los sólidos geométricos.

Validar mediante el criterio de especialistas la relevancia de la estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiel.

Diagnóstico o trabajo de campo

En cumplimiento del primer objetivo de esta investigación, que busca identificar la situación actual de las habilidades de visualización espacial y razonamiento geométrico en estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” en Cusco, presentamos los resultados obtenidos a través de los trabajos de campo realizados. En este informe, se detallan los resultados y análisis de cada categoría, dimensión e instrumento utilizado en la evaluación. Asimismo, se proporcionan relaciones analíticas e interpretativas de los resultados para brindar una comprensión más profunda. La orga-

nización de la presentación se estructura de manera coherente para facilitar la comprensión y el análisis de la información recopilada.

Proceso de categorización

La categoría seleccionada para el análisis se centra en el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico. Para abordar esta evaluación, las dimensiones se organizaron considerando los criterios propios de los niveles de Van Hiele, así como la utilización de herramientas como la visualización y GeoGebra. Este enfoque permitirá examinar de manera integral y detallada la capacidad de los estudiantes en términos de visualización espacial y razonamiento geométrico, utilizando tanto marcos teóricos reconocidos como recursos tecnológicos contemporáneos.

Tabla 1: Matriz de organización de instrumentos

Categorías	Dimensiones	Fases	Indicadores	Instrumentos
Diagnóstico del desarrollo de visualización y razonamiento geométrico en sólidos geométricos	Nivel 0: Visualización o reconocimiento	FASE 1	1. Visualiza el desarrollo del cilindro y del cono. 2. Visualiza e identifica las superficies laterales de cilindro y cono.	Prueba pedagógica Encuesta a docente Encuesta
		FASE2		
		FASE3		
		FASE4		
		FASE5		
	Nivel 1: Análisis	FASE 1	3. Visualiza e identifica los elementos de esfera, cilindro y cono. 4. Visualiza cada sólido y argumenta las características de cada uno de ellos.	Prueba pedagógica Encuesta a docente
		FASE2		
		FASE3		
		FASE4		
		FASE5		
	Nivel 2: Ordenación o clasificación	FASE 1	5. Visualiza y razona para hallar el área del cilindro, esfera y cono 6. Visualiza y razona para hallar el volumen del cilindro, esfera y cono 7. Visualiza y utiliza el razonamiento geométrico para resolver problemas 8. Visualiza y utiliza el razonamiento geométrico para resolver problemas	Prueba pedagógica Encuesta a docente
		FASE2		
		FASE3		
		FASE4		
		FASE5		
	Nivel 3: Deducción Formal	FASE 1	9. Aplica la habilidad de visualización espacial para graficar en 3D.	Prueba pedagógica Encuesta a docente
		FASE2		
		FASE3		
		FASE4		
		FASE5		

Nota. Tomado de Merma (2015)

En la fase de trabajo de campo, se seleccionaron métodos empíricos específicos para la recopilación y análisis de datos. Se optó por la utilización de encuestas y observaciones como herramientas principales para recolectar información relevante. El método estadístico fue aplicado posteriormente para procesar y dar interpretación a los datos recopilados. Además, se implementó la triangulación como estrategia para comparar y contrastar los resultados obtenidos a través de diferentes instrumentos, proporcionando así una visión más completa y robusta de la situación de las habilidades de visualización espacial y razonamiento geométrico de los estudiantes. Los instrumentos empleados son los siguientes:

Prueba diagnóstica

Este instrumento fue diseñado con el propósito de identificar las etapas de visualización espacial y los niveles de razonamiento geométrico, utilizando como referencia los indicadores establecidos en el modelo Van Hiele. Se estructuró con un total de 10 ítems, distribuidos de la siguiente manera: los ítems 1 y 2 abordan el nivel 0 del modelo Van Hiele; los ítems 3 y 4 se centran en el nivel 1; los ítems 5, 6, 7 y 8 evalúan el nivel 2 del modelo Van Hiele, mientras que los ítems 9 y 10 se enfocan en el nivel 3 del modelo Van Hiele. Este enfoque estratificado permite una evaluación detallada de las capacidades de visualización y razonamiento geométrico de los estudiantes en diferentes niveles de desarrollo cognitivo.

Cuestionario de encuesta para docentes

El propósito de este instrumento consistió en analizar los componentes de la estrategia de enseñanza, así como evaluar la coherencia lógica de las actividades propuestas como estrategia de aprendizaje. Se empleó para identificar y examinar los elementos clave que conforman la estrategia educativa, garantizando que las actividades propuestas estuvieran alineadas de manera coherente con los objetivos de aprendizaje. La aplicación de este instrumento permitió

una evaluación detallada de la efectividad y consistencia de la estrategia pedagógica empleada.

Ficha de análisis de los cuadernos de trabajo

La aplicación de este instrumento tuvo como objetivo principal evaluar la pertinencia de las actividades propuestas por el docente, asegurando que estuvieran dirigidas de manera efectiva al desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico en los estudiantes. Se utilizó para observar y analizar críticamente si las tareas y actividades planificadas por el docente realmente contribuían al fortalecimiento de las habilidades específicas de visualización espacial y razonamiento geométrico, proporcionando así una evaluación detallada de la idoneidad de la enseñanza en relación con los objetivos de aprendizaje deseados.

Los instrumentos fueron desarrollados siguiendo los procesos definidos por la universidad, con un enfoque principal en la operacionalización de teorías y enfoques. Para esta investigación, se ha tomado como referencia teórica los niveles de pensamiento geométrico del modelo Van Hiele, utilizando los indicadores de cada nivel como base para la elaboración de los instrumentos. La selección de estos instrumentos se basó en criterios sólidos, considerando las rutas de aprendizaje para situar el campo de estudio de manera adecuada. Además, los instrumentos fueron sometidos a evaluación por parte de expertos y especialistas, quienes fueron seleccionados por su vasta experiencia profesional, asegurando así la validez de los instrumentos de acuerdo con los criterios establecidos.

La elección de la categoría diagnóstica se fundamentó en el objetivo general de la investigación, que se centra en evaluar el progreso de la visualización espacial y el razonamiento geométrico en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” en Cusco.

Para la validación de los instrumentos señalados, se consideró el método de especialistas. Respecto al procesamiento de data, las tareas cumplidas son las siguientes:

Para analizar los datos recopilados con el instrumento de prueba diagnóstica, se realizó una construcción inicial de una base de datos en Excel, permitiendo así un procesamiento integral tanto cuantitativo como cualitativo. Posteriormente, los datos cuantitativos fueron sometidos a un análisis a través del *software* SPSS 22, mientras que los datos cualitativos se procesaron de forma manual utilizando Word y Excel. Este enfoque permitió obtener resultados detallados y completos de la investigación.

En el análisis del instrumento cuestionario de encuesta, se llevó a cabo una evaluación cualitativa de los datos recopilados a través de los tres instrumentos aplicados. Este análisis se inició categorizando, dimensionando e indicando los resultados específicos de cada instrumento. A partir de este proceso, se identificaron regularidades entre los indicadores, lo que permitió establecer resultados globales correspondientes a cada instrumento. En consecuencia, se obtuvieron resultados cuantitativos en algunos de los instrumentos utilizados.

En el instrumento de ficha de análisis documental, se llevó a cabo un análisis cualitativo en Word, agrupando las respuestas de cada estudiante según su regularidad. Posteriormente, se establecieron relaciones con las fases de los niveles propuestos, culminando con una interpretación cualitativa de los resultados obtenidos. Este proceso permitió comprender de manera más detallada la situación de las habilidades de visualización espacial y razonamiento geométrico en los estudiantes del cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” de Cusco.

Organización de las categorías y surgimiento de las primeras conclusiones aproximadas

Instrumento de prueba diagnóstica. Esta herramienta alcanzó respuestas abiertas, su procesamiento se abordó de la siguiente manera:

Este enfoque de respuestas abiertas es adecuado para ítems que permiten respuestas libres. Dichas preguntas pueden recibir respuestas en diferentes niveles del modelo de Van Hiele. Al evaluar una respuesta, es crucial primero determinar el nivel de razonamiento en el que se ha respondido y luego analizar la calidad de la respuesta, considerando tanto su precisión matemática como el empleo del nivel de razonamiento correspondiente (Jaime, 1993). Este método ofrece una evaluación más holística, tomando en cuenta tanto la comprensión matemática como la habilidad de razonamiento geométrico.

Tabla 2: *Características de las respuestas, de una prueba con respuesta abierta*

Tipo 1	Ítems sin respuesta, con respuestas no codificadas o con respuestas que indican que el estudiante no está en un determinado nivel de razonamiento
Tipo 2	Respuesta matemáticamente incorrecta y muy incompleta, en las que se reconocen indicios de utilización de cierto nivel de razonamiento.
Tipo 3	Respuesta matemáticamente correcta pero muy incompleta, en las que se reconocen indicios de cierto nivel de razonamiento. Se trata de respuestas muy breves y pobres, sin errores matemáticos.
Tipo 4	Respuesta que reflejan claramente características de dos tipos de niveles de razonamiento consecutivo. Esta es la situación más típica de los alumnos en transición de nivel. Las respuestas pueden ser matemáticamente correctas o incorrectas, pero deben ser bastante completas.
Tipo 5	Respuestas bastante completas, pero matemáticamente incorrectas, que reflejan la utilización predominante de un nivel de razonamiento. La incorrección de las respuestas puede deberse a errores matemáticos o a que siguen una línea de trabajo que no lleva a la solución del problema planteado, pero cuyos procesos de razonamiento son válidos.
Tipo 6	Respuestas bastante completas y matemáticamente correcta que reflejan claramente la utilización predominante de un nivel de razonamiento determinado. Se trata de respuestas claras y correctas, pero que no están completas porque no llegan a resolver el problema totalmente, porque hay “saltos” en el razonamiento deductivo seguido, porque tiene pequeños errores, etc.
Tipo 7	Respuesta matemáticamente correcta y completa que reflejan claramente la utilización de un nivel de razonamiento determinado.

Nota. Tomado de Merma (2015)

En cuanto a la ponderación de los diferentes tipos de respuestas, se adoptó el enfoque propuesto por Jaime (1993), cuya asignación se aborda con base en valores numéricos de 0 a 100.

Tabla 3: Ponderaciones a cada tipo de respuesta

Tipo	1	2	3	4	5	6	7
Ponderación %	0	12	25	50	75	80	100

Nota. Tomado de Merma (2015)

Para localizar el grado de adquisición, se consideraron los valores cuantitativos y cualitativos que proporciona Jaime (1993).

Tabla 4: Valores cuantitativos y cualitativos de los grados de adquisición del nivel de Van Hiele

0	Adquisición nula:	$0\% \leq Gr(n) \leq 15\%$
15	Adquisición baja:	$15\% \leq Gr(n) \leq 40\%$
40	Adquisición intermedia:	$40\% \leq Gr(n) \leq 60\%$
60	Adquisición intermedia:	$60\% \leq Gr(n) \leq 85\%$
85	Adquisición intermedia:	$85\% \leq Gr(n) \leq 100\%$
100		

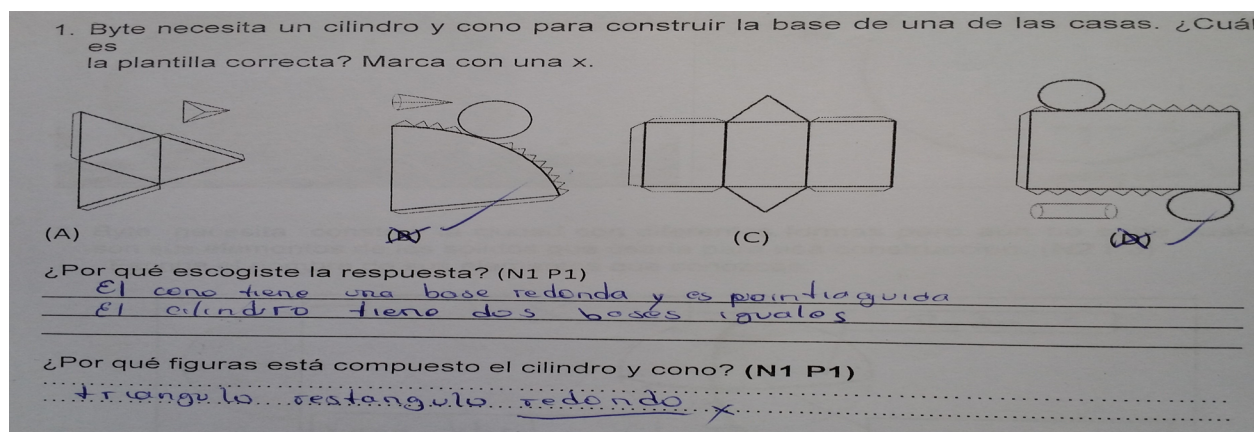
Nota. Tomado de Merma (2015)

En el análisis cualitativo de la prueba pedagógica, se ofrece un desglose detallado de cada ítem, incluyendo sus indicadores específicos. A modo de ejemplo, se presenta una caracterización detallada de la respuesta de la estudiante Rosa Luz en la prueba diagnóstica. Este enfoque permite una comprensión pormenorizada de cómo los estudiantes enfrentan y comprenden cada pregunta, ofreciendo una evaluación minuciosa de sus habilidades en visualización espacial y razonamiento geométrico.

Ítem 1. Indicador P1N0, visualiza el desarrollo del cilindro y del cono. La respuesta proporcionada por la estudiante Rosa Luz fue matemáticamente

correcta, pero carece de una justificación adecuada para las preguntas abiertas, lo que indica un nivel de razonamiento incipiente. Corresponde a una respuesta extremadamente breve y poco coherente, utilizando un lenguaje básico. Se observa la necesidad de desarrollar habilidades para expresar y justificar sus procesos de pensamiento de manera más completa y estructurada.

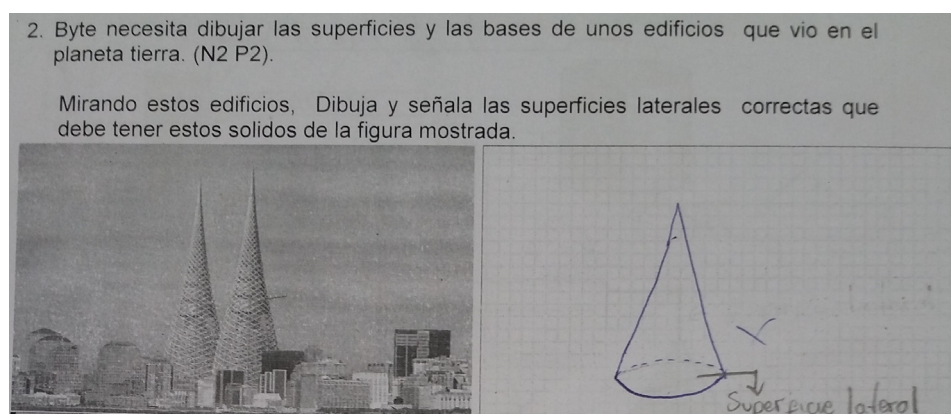
Figura 1: Respuesta del ítem 1



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 2A. Indicador nivel 0, visualiza e identifica las superficies laterales de cilindro y cono. Se evidencian situaciones como la falta de respuesta, respuestas no codificadas o respuestas que sugieren que el estudiante no ha alcanzado un nivel específico de razonamiento, especialmente en la omisión de señalar la superficie lateral.

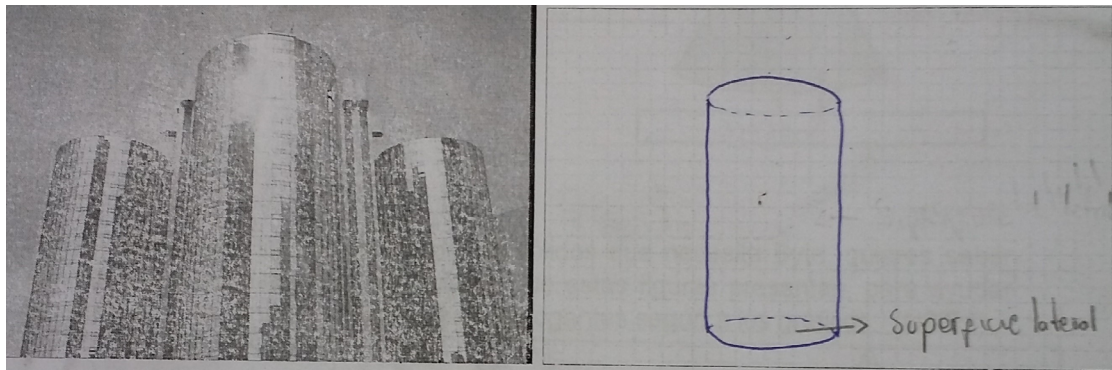
Figura 2: Respuesta del ítem 2A



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 2B. Indicador nivel 0. Se observan situaciones como la ausencia de respuesta, respuestas no codificadas o respuestas que sugieren que el estudiante aún no ha alcanzado un nivel específico de razonamiento, manifestándose, por ejemplo, en la falta de indicación de la superficie lateral y en la confusión con la base del cilindro.

Figura 3: *Respuesta del ítem 2B*

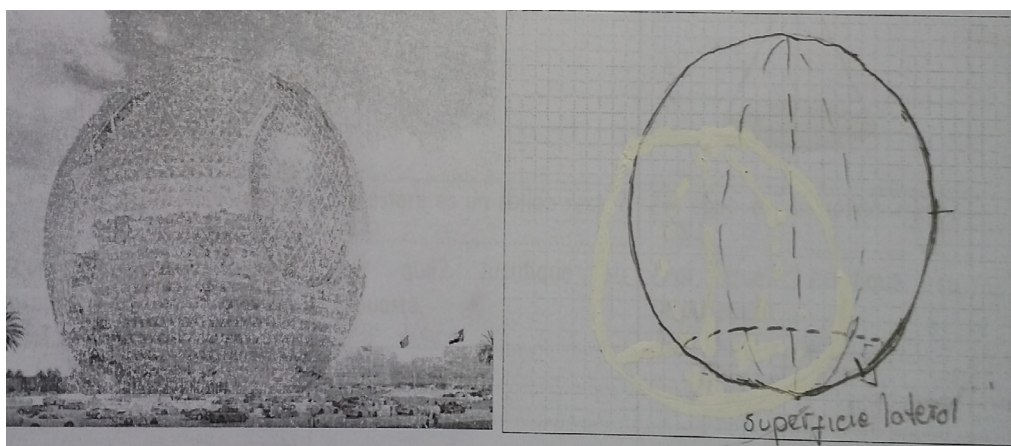


Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 2. Indicador nivel 0 “C”. En este contexto, algunos ítems evidencian la ausencia de respuesta, respuestas no codificadas o respuestas que sugieren que el estudiante aún no ha alcanzado un nivel específico de razonamiento. Se observa una continuidad en la confusión, esta vez relacionada con la circunferencia. Estos resultados señalan áreas específicas que requieren atención y apoyo adicional en el desarrollo de las habilidades de visualización espacial y razonamiento geométrico, subrayando la necesidad de estrategias pedagógicas específicas para abordar estas dificultades.

Ítem 2C. Indicador nivel 1, visualiza e identifica los elementos de esfera, cilindro y cono. En este análisis, se identifican ítems sin respuesta, respuestas no codificadas o respuestas que sugieren que el estudiante aún no ha alcanzado un nivel específico de razonamiento. La confusión persiste, focalizándose en esta ocasión en la comprensión de la circunferencia.

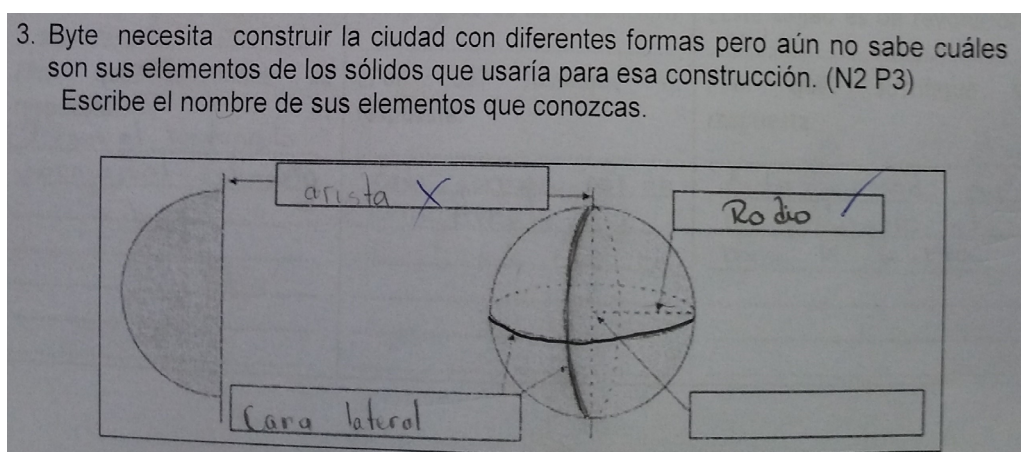
Figura 4: Respuesta del ítem 2C



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 3A. Indicador nivel 1, visualiza e identifica los elementos de esfera, cilindro y cono. La respuesta proporcionada es matemáticamente incorrecta y carece de detalles, aunque muestra ciertos indicios de un nivel de razonamiento. Es evidente que hay dificultades para distinguir los elementos geométricos, y se presenta una confusión al referirse a los poliedros.

Figura 5: Respuesta del ítem 3A

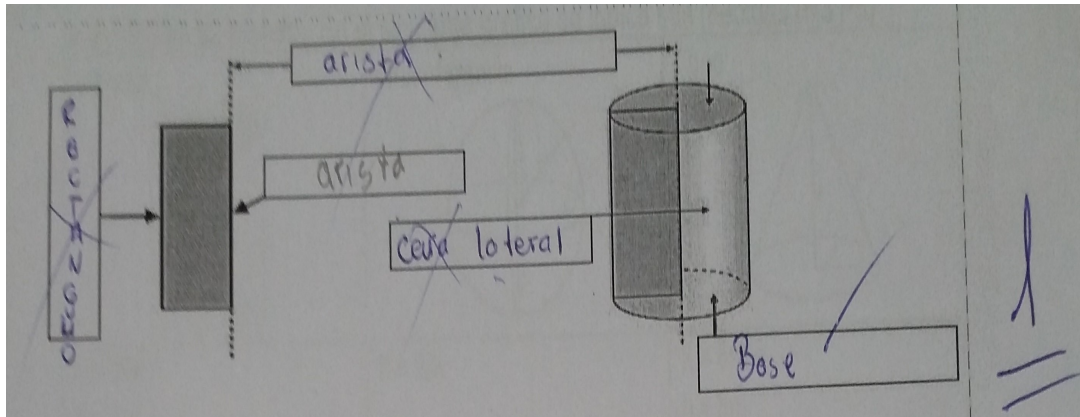


Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 3B. Indicador nivel 1, visualiza e identifica los elementos de esfera, cilindro y cono. En este caso, el ítem no cuenta con una respuesta, o la respuesta proporcionada no se codifica correctamente, sugiriendo que el estudiante podría no encontrarse en un nivel de razonamiento específico. La persistente

confusión con los poliedros y la presencia de errores frecuentes resaltan la necesidad de abordar de manera más específica y detallada los conceptos relacionados con los sólidos geométricos.

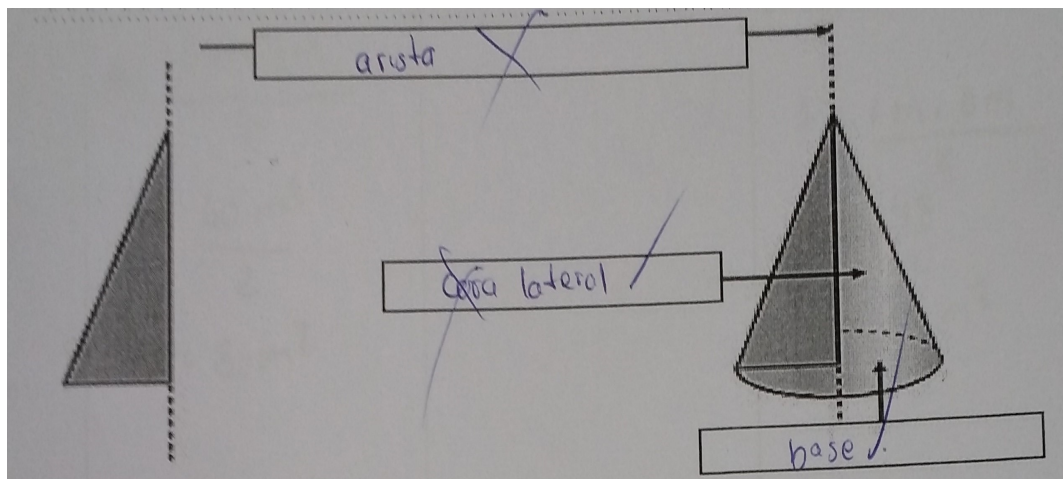
Figura 6: Respuesta del ítem 3B



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 3C. Indicador nivel 1, visualiza e identifica los elementos de esfera, cilindro y cono. En este caso, el ítem no cuenta con una respuesta, o la respuesta proporcionada no se codifica correctamente, sugiriendo que el estudiante podría no encontrarse en un nivel de razonamiento específico. La confusión persistente con los elementos del poliedro indica la necesidad de una atención particular en la comprensión detallada de estos conceptos geométricos.

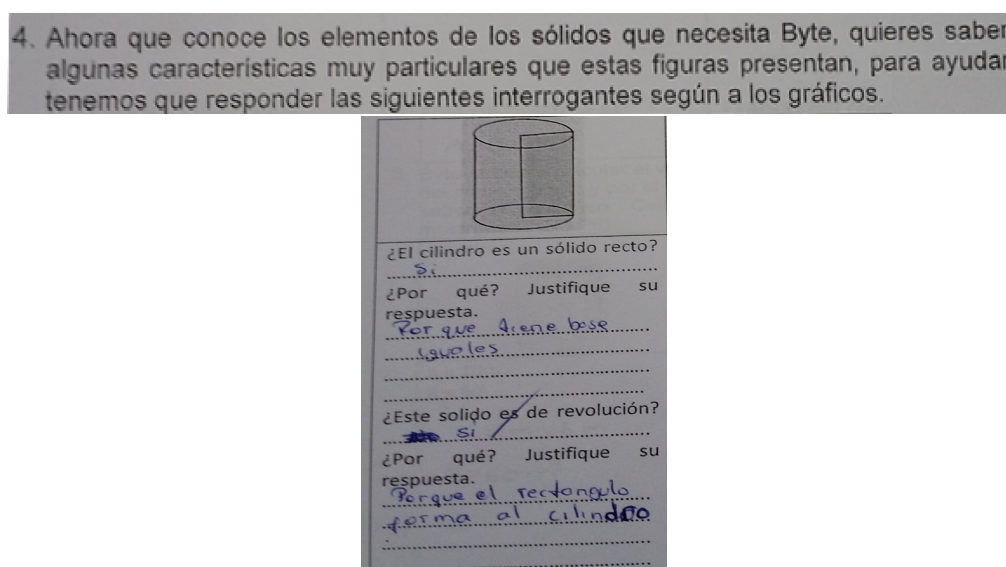
Figura 7: Respuesta del ítem 3C



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 4A. Indicador nivel 1, visualiza cada sólido y argumenta las características de cada uno. La respuesta proporcionada es matemáticamente correcta, pero se caracteriza por su brevedad y falta de justificación, lo que indica cierto nivel de razonamiento, aunque incompleto. La limitada explicación y la falta de argumentación detallada sugieren que el estudiante podría beneficiarse de un desarrollo más profundo de su capacidad para expresar y justificar sus respuestas de manera más extensa.

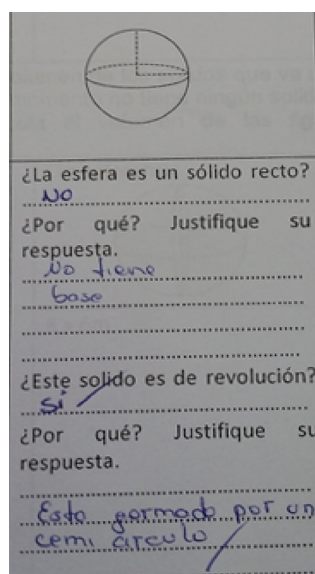
Figura 8: *Respuesta del ítem 4A*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 4B. Indicador nivel 1, visualiza cada sólido y argumenta las características de cada uno. Estas respuestas evidencian claramente características de dos tipos de niveles de razonamiento consecutivos. Este escenario es común en alumnos que están en transición entre niveles. Las respuestas pueden ser tanto matemáticamente correctas como incorrectas, pero lo notable es que son bastante completas en su presentación.

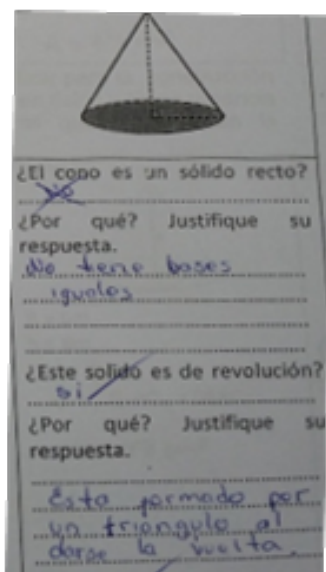
Figura 9: Respuesta del ítem 4B



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 4C. Indicador nivel 1, visualiza cada sólido y argumenta las características de cada uno. Esta respuesta muestra corrección matemática, pero es notablemente incompleta. Aunque hay indicios de cierto nivel de razonamiento, las respuestas son breves y carecen de detalle, sin errores matemáticos aparentes. La alumna comete errores al determinar si el ángulo es recto o no, y no proporciona una justificación adecuada.

Figura 10: Respuesta del ítem 4C



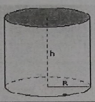
Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 5A. Indicador nivel 2, visualiza y razona para hallar el área del cilindro, esfera y cono. En este caso, la estudiante no proporcionó una respuesta, o la respuesta no se pudo codificar adecuadamente, lo que sugiere la posibilidad de que la estudiante no esté operando en un nivel específico de razonamiento. La observación indica que la estudiante tiene dificultades para visualizar la figura tridimensional como un cuerpo sólido y, en cambio, podría percibirlo como una figura plana.

Figura 11: Respuesta del ítem 5A

5. Byte necesita calcular cada una de las áreas de los sólidos para su construcción de la ciudad en su planeta. En el siguiente grafico se indica sus medidas

Cilindro



$h = 10m$
 $R = 6m$

$$A = \frac{10m \cdot 6m}{2}$$

$$A = \frac{60m^2}{2}$$

$$A = 30m^2$$

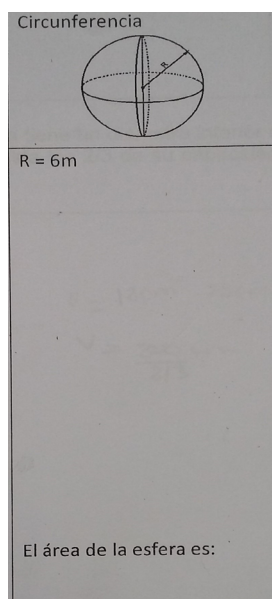
El área del cilindro es:

$$A = 30m^2$$

Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 5B. Indicador nivel 2, visualiza y razona para hallar el área del cilindro, esfera y cono. En estos ítems, los estudiantes no proporcionaron respuestas o sus respuestas no pudieron ser codificadas de manera adecuada. Esto sugiere que los estudiantes podrían no estar operando en un nivel específico de razonamiento según los indicadores establecidos en el modelo de Van Hiele.

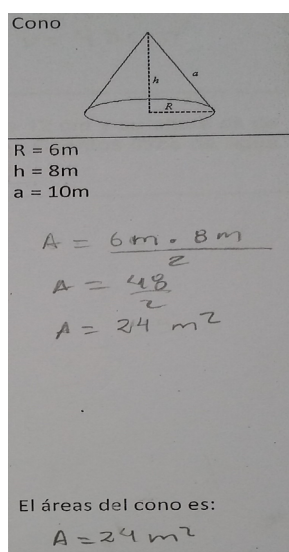
Figura 12: Respuesta del ítem 5B



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 5C. Indicador nivel 2, visualiza y razona para hallar el área del cilindro, esfera y cono. En estos ítems, los estudiantes no proporcionaron respuestas o sus respuestas no pudieron ser codificadas de manera adecuada. Además, algunas respuestas indicaron una confusión conceptual, ya que la estudiante parecía mezclar el cálculo de un sólido con el área de una figura plana, en este caso, el área de un triángulo.

Figura 13: Respuesta del ítem 5C



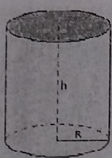
Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 6A. Indicador nivel 2, visualiza y razona para hallar el volumen del cilindro, esfera y cono. En estos ítems, la estudiante no proporcionó respuestas o sus respuestas no pudieron ser codificadas de manera adecuada. Se observa una confusión en la que la alumna parece mezclar conceptos al confundir un sólido con un cuadrilátero, evidenciando dificultades en la visualización y comprensión de las propiedades geométricas tridimensionales.

Figura 14: Respuesta del ítem 6A

6. Byte necesita calcular el volumen de los sólidos que va utilizar para la construcción del planeta Marte y por el momento no tiene ningún sólido en físico y es de urgencia saber su volumen. Calcula el volumen de las figuras que continuación le mostramos.

Cilindro



$h = 10m$
 $R = 6m$

$V = 10m, 6m$
 $V = 60m^2$

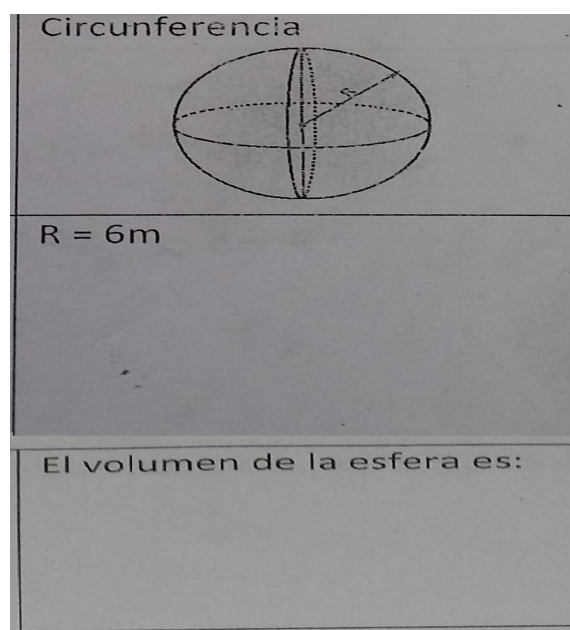
El volumen del cilindro es:

$V = 6cm^2$

Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 6B. Indicador nivel 2, visualiza y razona para hallar el volumen del cilindro, esfera y cono. En estos ítems, no se recibieron respuestas de la estudiante, las respuestas no pudieron ser codificadas de manera adecuada o indican que la estudiante no está en un nivel de razonamiento específico.

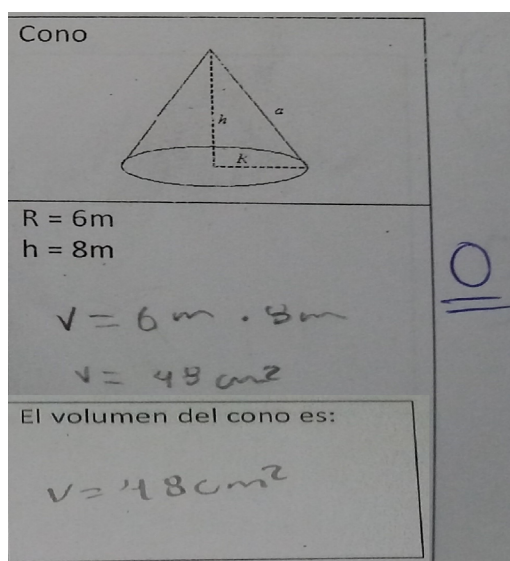
Figura 15: Respuesta del ítem 6B



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 6C. Indicador nivel 2, visualiza y razona para hallar el volumen del cilindro, esfera y cono. En estos ítems, la estudiante no proporcionó respuestas o las respuestas no pudieron ser codificadas adecuadamente, lo que indica que la estudiante puede no estar en un nivel de razonamiento específico. En estas situaciones, se observa una falta de visualización de los cuerpos geométricos y dificultades para calcular áreas de figuras planas o volúmenes de sólidos.

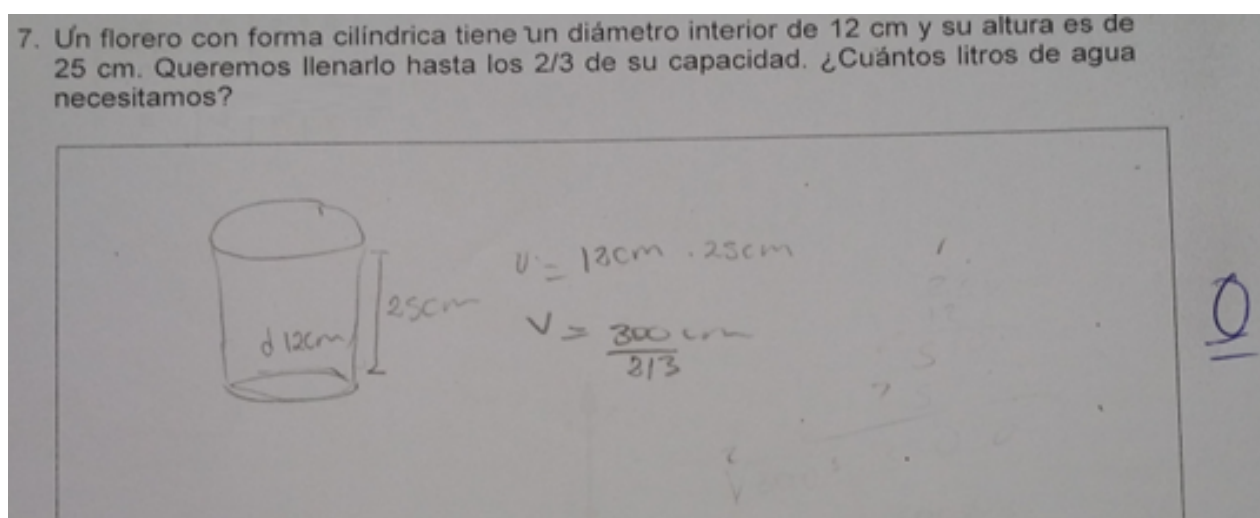
Figura 16: Respuesta del ítem 6C



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 7. Indicador nivel 2, visualiza y utiliza el razonamiento geométrico para resolver problemas. En estos ítems, la estudiante no proporcionó respuestas o las respuestas no pudieron ser codificadas de manera efectiva, indicando que podría tener dificultades para ubicarse en un nivel específico de razonamiento. Aunque intenta resolver los problemas, se observa una falta de planteamiento adecuado y de resolución efectiva, lo que sugiere posibles desafíos en el desarrollo de habilidades de razonamiento geométrico.

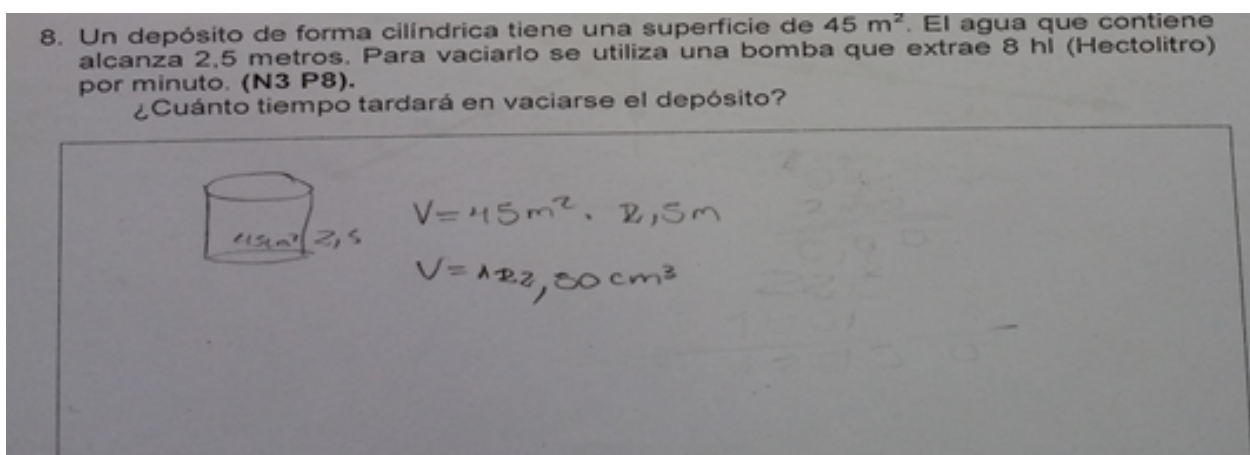
Figura 17: Respuesta del ítem 7



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 8. Indicador nivel 2, visualiza y utiliza el razonamiento geométrico para resolver problemas. En estos ítems, el estudiante no proporcionó respuestas o las respuestas no pudieron ser codificadas de manera efectiva, sugiriendo que podría enfrentar desafíos para ubicarse en un nivel específico de razonamiento. La falta de planteamiento del problema y la ausencia de la conversión necesaria indican dificultades en la comprensión y aplicación de conceptos geométricos.

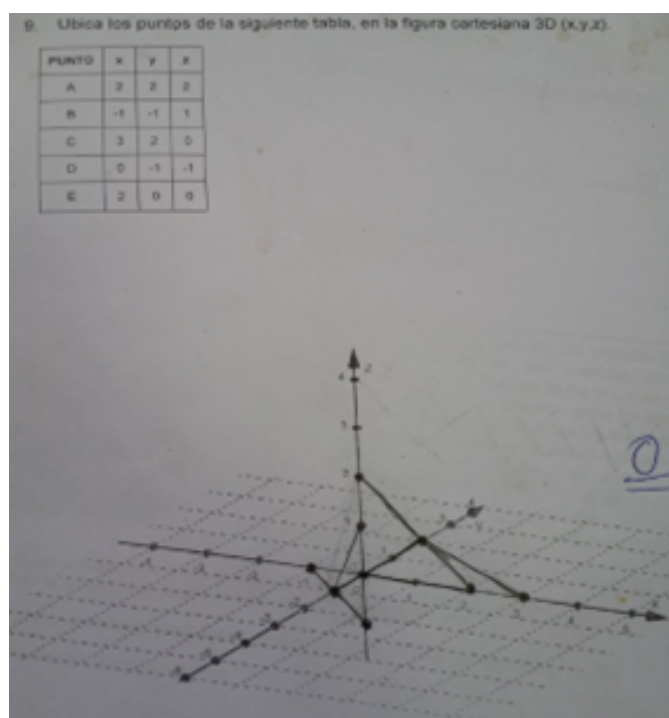
Figura 18: Respuesta del ítem 8



Nota. Tomado de Merma (2015)

Ítem 9. Indicador nivel 3, aplica la habilidad de visualización espacial para graficar en 3D. En estos ítems, el estudiante no ofreció respuestas o las respuestas no pudieron ser codificadas de manera efectiva. Esto sugiere que podría enfrentar dificultades para ubicarse en un nivel específico de razonamiento en relación con la visualización espacial y el trabajo con coordenadas tridimensionales.

Figura 19: Respuesta del ítem 9



Nota. Tomado de Merma (2015)

Esta pregunta requiere que el estudiante visualice las imágenes, utilizando su esquema perceptual para identificar el desarrollo del cilindro y el cono. En este proceso, el estudiante emplea primero el discurso natural para comprender la situación y luego utiliza el discurso teórico para comunicar los resultados obtenidos.

Al analizar la respuesta de Rosa Luz, se observa que identifica de manera precisa el desarrollo del cilindro y del cono. Además, justifica de manera coherente por qué identificó esas gráficas, explicando que el cono está formado por un triángulo rectángulo y una base redonda, mientras que el cilindro tiene dos bases iguales. Esta respuesta es matemáticamente completa y está alineada con el nivel 1 del modelo Van Hiele, ya que demuestra un entendimiento más profundo de las características geométricas de estos sólidos. Por lo tanto, la respuesta de Rosa Luz se clasifica dentro del tipo 7 de las características establecidas por Jaime (1993), pues es matemáticamente completa y correcta.

El análisis se ejecutó para los 13 estudiantes, evaluando cada ítem y nivel correspondiente. Se construyó una base de datos en Excel organizada por tipos de respuestas y niveles. De esta manera, el análisis cualitativo se transformó en datos cuantitativos con el objetivo de determinar el grado de adquisición en cada nivel. Los resultados del procesamiento de datos se presentaron de la siguiente manera:

En el nivel 0, las respuestas promedio alcanzan el 28.27 %, lo que indica un grado de adquisición bajo. Esta cifra sugiere que los estudiantes poseen algunas características de este nivel, como la capacidad para describir en su totalidad las figuras, emplear un lenguaje básico para comunicar resultados y reconocer de manera implícita componentes y propiedades de los objetos. Sin embargo, aún hay aspectos de este nivel que requieren ser trabajados y desarrollados.

En el nivel 1, las respuestas promedio alcanzan el 20.53 %, lo que indica un grado de adquisición bajo. Este promedio sugiere que los estudiantes no

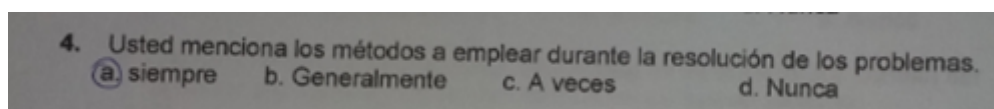
cumplen con las características esperadas para este nivel, señalando la necesidad de trabajar más en el desarrollo de habilidades correspondientes a este nivel.

En el nivel 2, las respuestas promedio se sitúan en un 5.01 %, lo que señala un grado de adquisición nula. Este resultado indica que los estudiantes no cumplen con las características esperadas para este nivel, resaltando la necesidad de un trabajo más profundo en el desarrollo de habilidades correspondientes a este nivel específico.

En el nivel 3, las respuestas promedio se encuentran en 1.85 %, lo que refleja un grado de adquisición nula. Este resultado sugiere que los estudiantes no cumplen con las características esperadas para este nivel, subrayando la necesidad de un enfoque más detallado en el desarrollo de habilidades específicas de este nivel de pensamiento geométrico.

Cuestionario para docentes. Se aplicó un análisis tanto cualitativo como cuantitativo, dividiendo la evaluación en estrategias de enseñanza y estrategias de aprendizaje. A modo de ejemplo, se muestra una respuesta proporcionada por la docente Fanny como parte de este proceso.

Figura 20: *Respuesta de la docente Fanny, ítem 4 del cuestionario para docentes*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Esta pregunta tiene como objetivo identificar los elementos de la estrategia de aprendizaje, ya que se enfoca en los métodos propuestos por el docente para resolver problemas que son aplicados por los estudiantes. Al analizar la respuesta de la profesora Fanny a la pregunta “¿Usted menciona los métodos a emplear durante la resolución de los problemas?”, su respuesta es afirmativa en todos los casos. Esto indica que, durante el desarrollo de una sesión de clase, el

docente menciona los métodos necesarios para que los estudiantes los utilicen en la resolución de problemas, calificando esta respuesta como eficiente.

Se procedió con el mismo proceso de análisis para los 5 docentes encuestados mediante el programa SPSS 22, procesando la base de datos correspondiente. Los resultados obtenidos se presentan a continuación.

Considerando la estrategia de enseñanza, se discurió lo siguiente:

Eficiente, se observa que el 40 % de los docentes muestran características destacadas. Estos docentes intervienen cuando detectan errores por parte de los estudiantes y se preocupan por registrarlos. Además, fomentan la correcta manipulación de materiales, aunque durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes no siempre se orientan hacia el propósito del material. También se destaca que los docentes promueven la discusión, pero a veces dejan suelta la conclusión final. Asimismo, incentivan la elaboración de resúmenes, aunque no suelen utilizar organizadores visuales de manera consistente.

Se contempla que el 60 % de los docentes presentan características que podrían considerarse como poco eficientes. Estos docentes se limitan a realizar preguntas sobre el tema a tratar, utilizando esto como una forma de identificar conocimientos previos, pero no exploran otros factores como la afectividad y la emotividad. Además, enuncian los tipos de problemas y sus métodos, pero al desarrollarlos, no los muestran de manera clara. Aunque proporcionan materiales y módulos, estos diseñados no avalan el fomento de la visualización ni del razonamiento geométrico.

Al respecto con la estrategia de aprendizaje, se alcanzó lo siguiente:

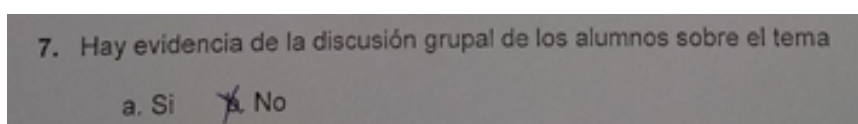
Se visualiza que el 40 % de los docentes demuestran ser eficientes. Estos docentes destacan al generar una manipulación adecuada de los materiales, lo que se traduce en buenos resultados académicos y facilita el aprendizaje. Además, promueven la discusión en el aula, asegurándose de llegar a una conclusión. Utilizan estrategias como la realización de resúmenes con el apoyo de

organizadores visuales, fomentando así una discusión contextualizada del tema y logrando conclusiones con la participación activa de todos los estudiantes.

El 60 % de los docentes se clasifican como poco eficientes. Se observan características como la correcta manipulación de materiales por parte de los docentes, pero durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, los estudiantes no reciben una orientación clara sobre el propósito de los materiales. Además, aunque estos docentes fomentan la discusión en el aula, a menudo dejan suelta la conclusión, y aunque promueven la realización de resúmenes, no emplean organizadores visuales para reforzar estos procesos. Estas prácticas indican áreas donde la eficiencia podría mejorarse para optimizar el aprendizaje de los estudiantes.

Ficha de análisis documental. En esta etapa, se llevó a cabo un análisis cualitativo para observar el desarrollo del tópico de trabajo. Como muestra, se presenta una de las 10 observaciones realizadas en el cuaderno de trabajo de la estudiante Rosa Luz.

Figura 21: *Respuesta de la estudiante Rosa Luz*



7. Hay evidencia de la discusión grupal de los alumnos sobre el tema

a. Si ☐ No ☒

Nota. Tomado de Merma (2015)

En una primera evaluación de esta pregunta, se identifica la fase del modelo Van Hiele como la etapa 3 de explicitación, ya que el trabajo grupal implica un intercambio de ideas y experiencias entre los estudiantes. Luego, en un segundo análisis, se examina la respuesta teniendo en cuenta la rúbrica diseñada específicamente para este instrumento.

En este mismo procedimiento, se continuó con los 13 estudiantes, procesando los datos mediante el software Atlas.ti. Los resultados obtenidos se analizaron en detalle para extraer conclusiones significativas sobre las respuestas

de los estudiantes en relación con el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico.

Fase 1. Preguntas/ información. Las acciones no realizadas por los docentes incluyen la falta de exploración de los conocimientos previos de los estudiantes, un aspecto crucial para introducir nuevos temas de manera efectiva. Además, los docentes no proporcionan información sobre los materiales a utilizar, como se observa en el análisis que carece de orientaciones para el uso de los materiales, así como de instructivos para los módulos autoinstructivos. Del mismo modo, no se presenta qué tipos de problemas se abordarán durante la sesión. Estas omisiones pueden tener un impacto en el entendimiento y la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

Las acciones cumplidas por los docentes incluyen la intención de descubrir el nivel de razonamiento de los estudiantes, aunque esta intención se lleva a cabo sin una planificación clara. Esto se refleja en el análisis del cuaderno y del cuaderno de trabajo, donde los estudiantes no reciben orientación sobre la intención específica del tema a desarrollar. La falta de una planificación más detallada puede afectar la efectividad de la evaluación del nivel de razonamiento de los estudiantes y la consecuente adaptación de la enseñanza a sus necesidades específicas.

Fase 2. Orientación dirigida. Las acciones no cumplidas por los docentes incluyen la falta de dirección para que los estudiantes descubran, comparen y aprendan los conceptos y propiedades de los objetos matemáticos. Este hecho se refleja en el análisis de la ficha documental, donde los materiales presentados parecen centrarse en temas de carácter memorístico y algorítmico. La ausencia de estrategias que fomenten la comprensión profunda y la conexión de conceptos puede limitar el desarrollo de la visualización y el razonamiento geométrico de los estudiantes.

Entre las acciones ejecutadas, se destaca el intento por desarrollar aprendizajes significativos, aunque sin una orientación pedagógica clara. Es evidente

que los docentes buscan generar experiencias de aprendizaje con un enfoque más profundo, pero la falta de una dirección pedagógica estructurada puede afectar la efectividad de este intento. La necesidad de una planificación más detallada y estratégica para facilitar la comprensión profunda y la aplicación de los conceptos geométricos se hace evidente en este análisis.

Fase 3. Explicación (explicitación). Entre las acciones no cumplidas, se observa que los docentes no incorporan resúmenes en los cuadernos, lo que sugiere la posible ausencia de trabajos en grupo. Además, las respuestas proporcionadas por los estudiantes no concuerdan con los enunciados de los problemas, indicando que los estudiantes pueden no estar explicando cómo han abordado y resuelto los problemas, revelando deficiencias en la comprensión de los conocimientos previos. En la resolución de los problemas, persiste el uso de un lenguaje básico, lo que sugiere una falta de profundización en el razonamiento y la expresión matemática.

Las acciones realizadas son las siguientes: el docente implementa problemas como repaso, aunque no realiza una evaluación diagnóstica específica sobre el uso del lenguaje matemático y el razonamiento aplicado en la resolución de los problemas.

Fase 4. Orientación libre. Las acciones abordadas son que el docente debe plasmar problemas que permitan determinar situaciones novedosas, desafiando a los estudiantes a explorar y proponer diferentes enfoques para su resolución.

Las acciones no aplicadas se exponen a continuación: los problemas propuestos por los docentes en su mayoría involucran situaciones rutinarias con un único enfoque, lo que no impulsa a los estudiantes a desarrollar la visualización espacial y el razonamiento geométrico. Esta limitación se hace evidente cuando los estudiantes resuelven los problemas de manera autónoma, sin seguir un orden lógico o estructurado.

Fase 5. Integración. Las acciones aplicadas se destacan que el docente no tiende a generalizar propiedades específicas de los temas abordados y no lleva a cabo una evaluación integral que permita medir el alcance y la comprensión global de los estudiantes en relación con los conceptos geométricos estudiados.

Las acciones no cumplidas: el docente se limita a resolver problemas típicos aplicando propiedades específicas, sin explorar la diversidad de enfoques que los estudiantes podrían emplear para abordar los problemas. Además, la evaluación realizada por el docente parece centrarse únicamente en certificar las notas, sin considerar una evaluación más integral que mida el entendimiento profundo de los estudiantes y fomente el desarrollo de habilidades de razonamiento geométrico.

Triangulación. El análisis conjunto de la información recopilada mediante los tres instrumentos aplicados reveló los siguientes resultados:

Los estudiantes muestran un reconocimiento básico de las figuras, describiendo el cono como una figura con una base redonda y el cilindro como una figura con bases iguales y dos redondos. Sin embargo, tienen dificultades para comprender las superficies laterales, ya que observan las figuras de manera global, y esto se atribuye a la falta de trabajo en ejes tridimensionales por parte del docente.

La falta de comprensión de cómo se generan los sólidos de revolución impide que los estudiantes describan sus características. Además, tienen dificultades para determinar el área lateral y total, así como el volumen, dado que la visualización y el razonamiento no han sido desarrollados adecuadamente, especialmente en el contexto de ejes tridimensionales.

La incapacidad de graficar sólidos en el espacio tridimensional es otra limitación, pues los estudiantes no comprenden los ejes tridimensionales, especialmente la ubicación del eje “z”. Estas deficiencias señalan la necesidad de un enfoque más estructurado y práctico para desarrollar la visualización y el razonamiento geométrico en los estudiantes.

Conclusiones

La visualización va más allá de la mera visión, engloba la habilidad de percibir, representar, transformar, generar, comunicar y reflexionar sobre información visual en el pensamiento, permitiendo la interpretación de objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales.

El razonamiento es un proceso complejo que implica argumentar, describir, explicar, demostrar (proceso discursivo natural) y comparar con conocimientos matemáticos establecidos (proceso discursivo teórico).

La estrategia didáctica se define como un conjunto de recursos y conocimientos movilizados por el docente para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje, con el objetivo específico de desarrollar la visualización espacial y el razonamiento geométrico aplicando el modelo de Van Hiele y GeoGebra.

Los estudiantes enfrentan dificultades en identificar sólidos de revolución y sus desarrollos, así como en ubicarse en un espacio tridimensional y visualizar perspectivas a partir de representaciones bidimensionales.

En relación con el razonamiento geométrico, los estudiantes presentan dificultades para procesar información debido a la falta de visualización, especialmente al describir características de sólidos por rotación y deducir fórmulas de superficies y volúmenes.

Se observa que los docentes no exploran los conocimientos previos, no identifican las fases del desarrollo de la visualización y no realizan pruebas de diagnóstico para evaluar el nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes. Además, la estrategia de enseñanza carece a veces de orientación metodológica y los materiales educativos presentados no garantizan el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico.

La estrategia didáctica validada cuenta con características operativas y pedagógicas, evidenciando una secuencia lógica de las fases del modelo de Van Hiele y orientando al cambio educativo para desarrollar la visualización espacial en la resolución de problemas relacionados con sólidos de revolución.

La estrategia didáctica validada muestra consistencia lógica y teórica, respaldada por el criterio de especialistas en la materia.

Recomendaciones

Explorar otras fases para el desarrollo de la visualización espacial, además de las estudiadas en esta investigación.

Considerar diversas formas para el desarrollo del razonamiento geométrico, seleccionando aquellas más apropiadas según las intenciones del problema.

Integrar las fases de desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico en las actividades al diseñar la estrategia didáctica.

En el tratamiento del tema de generación de sólidos, se sugiere que los estudiantes construyan simulaciones con GeoGebra.

Al abordar temas de razonamiento geométrico en sólidos de revolución, explorar diferentes enfoques para desarrollar la visualización espacial.

Considerar los conocimientos previos de los estudiantes para facilitar el desarrollo de aprendizajes significativos.

Diferenciar entre una estrategia didáctica como adaptación de actividades basadas en una teoría existente y una propuesta pedagógica como la creación de un modelo nuevo.

Considerar la posibilidad de validar una estrategia didáctica a través de pruebas piloto para evaluar su eficacia en el contexto educativo.

CAPÍTULO V

MODELACIÓN Y VALIDACIÓN DE LA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA DESARROLLAR LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO ORIENTADO POR EL MODELO VAN HIELE Y EL USO DE GEOGEBRA

Propósito

Su propósito fue potenciar el aprendizaje de los estudiantes, aspirando a alcanzar el nivel 4 del modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele. Con este fin, se plantea la implementación de actividades específicas diseñadas para promover el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico en los estudiantes.

Fundamento socioeducativo

La educación se concibe como un proceso arraigado en la sociedad, orientado hacia el desarrollo integral de las personas para que puedan enfrentar los retos contemporáneos. Se cree que la enseñanza de la geometría puede cultivar competencias esenciales en los estudiantes, preparándolos para los desafíos de la sociedad actual. La propuesta se enfoca en desarrollar la visualización espacial y el razonamiento geométrico en relación con los sólidos geométricos, considerándola como una herramienta de interacción efectiva entre el sistema educativo y la sociedad. La implementación se llevará a cabo en la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” en Cusco, con 13 estudiantes de secundaria en modalidad de menores.

Fundamento pedagógico

La estrategia didáctica propuesta, centrada en el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico en sólidos geométricos, guiada por los principios de Van Hiele y el uso de GeoGebra, busca no solo mejorar el rendimiento académico, sino también fortalecer las capacidades y competencias de los estudiantes. Esta propuesta se fundamenta en investigaciones relevantes, como las de Arcavi (2003) y Duval (2002), quienes destacan la importancia de la visualización espacial como una habilidad creativa e interpretativa esencial en el contexto matemático.

Dentro de la propuesta, se considerarán las fases de visualización propuestas por Duval (2002), que abarcan la caracterización de la visualización, la estructuración figural y el registro discursivo. La atención pedagógica a estas fases permitirá avanzar de manera sistemática en el desarrollo de la visualización espacial, un aspecto crucial en el proceso de enseñanza de la geometría.

Con relación al desarrollo del razonamiento geométrico, nos basamos en la perspectiva teórica de García y López (2008), quien distingue dos tipos de razonamientos: el razonamiento como proceso discursivo natural y el razonamiento como proceso discursivo teórico.

El modelo de Van Hiele es la piedra angular de nuestro enfoque, ya que este modelo matemático, que abarca niveles de razonamiento geométrico y fases de aprendizaje, guiará la estrategia didáctica. Además, el recurso educativo GeoGebra se empleará como una herramienta para facilitar específicamente el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico. La combinación de estos elementos permitirá una aproximación integral y estructurada para mejorar la comprensión y aplicación de los conceptos geométricos.

Fundamento curricular

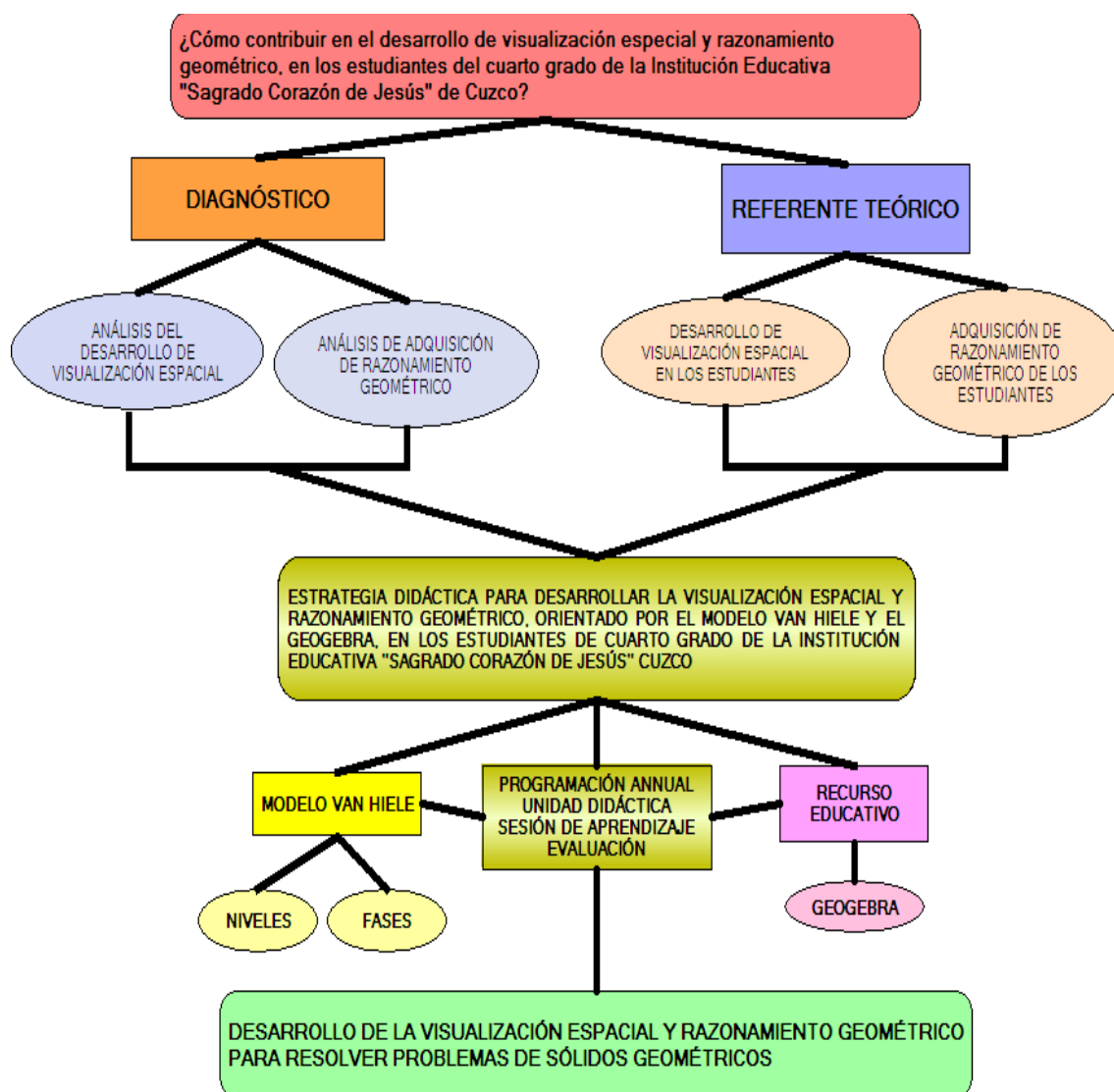
Esta investigación busca integrar la propuesta en el currículo educativo, siguiendo los lineamientos de las Rutas de Aprendizaje 2015 del Ministerio de

Educación. Se diseñó una ruta que se ajusta a las fases del modelo Van Hiele e se incorpora en diferentes momentos del proceso pedagógico. Cada fase aborda aspectos específicos, desde la motivación hasta la evaluación, garantizando la coherencia con los niveles de razonamiento geométrico. Esta propuesta puede ser fácilmente integrada en el PEI de la Institución Educativa y en los diversos insumos pedagógicos, asegurando una implementación efectiva en el aula.

Diseño

Aquí se detalla el diseño de la estrategia didáctica para fomentar la visualización espacial y el razonamiento geométrico en los estudiantes de cuarto grado de la Institución Educativa “Sagrado Corazón de Jesús” en Cuzco, basado en el modelo Van Hiele y utilizando GeoGebra como herramienta pedagógica.

Este modelo analógico representa la conexión entre los componentes, etapas, propósitos y la finalidad de la propuesta. Se ajusta en coherencia con el marco teórico y el diagnóstico realizado previamente.

Figura 22: Unidad funcional teórica de la propuesta

Nota. Tomado de Merma (2015)

El diseño analógico que se presenta tiene como objetivo principal fundamentar la secuencia seguida para desarrollar la estrategia didáctica. El proceso comienza con la formulación del problema, a partir del cual se desglosan dos componentes esenciales: el diagnóstico y el marco teórico. Cada uno de estos componentes se estructura en categorías específicas, y sus resultados actúan como guías para la configuración de la estrategia didáctica. De acuerdo con el diseño, esta estrategia se basa en el modelo Van Hiele y en la herramienta GeoGebra.

La planificación integral abarca diversos elementos, como el plan anual, las unidades didácticas, las sesiones de aprendizaje y, en última instancia, la evaluación. La aspiración final es lograr el desarrollo de la visualización espacial y el razonamiento geométrico, con el propósito de resolver problemas relacionados con sólidos geométricos.

Desarrollo o implementación

Con base en las reflexiones previas en el fundamento, detallamos la evolución de la estrategia didáctica, entrelazada con los fundamentos teóricos y los hallazgos del diagnóstico, así como con el marco teórico proporcionado por el modelo de Van Hiele. Esta conexión se expone en la siguiente matriz.

Tabla 5: Matriz de la estructura organizacional de la estrategia didáctica

Categoría	Niveles del modelo de Van Hiele	Fases del modelo de Van Hiele	Indicador del diagnóstico	Sesiones de aprendizaje	Actividades
Desarrollo de visualización espacial y razonamiento geométrico en sólidos geométricos	NIVEL 0 Visualización o reconocimiento	Fase 1: Preguntas información	Visualiza e identifica las propiedades y elementos del cilindro, cono y esfera, e identifica los elementos	Sesión de aprendizaje 1. Visualizando con GeoGebra los elementos y Propiedades del cilindro, cono y esfera	A. Los estudiantes grafican con GeoGebra el cilindro, cono y esfera. A. Los estudiantes visualizan la gráfica anterior, luego identifican los elementos de los sólidos geométricos A. Los estudiantes visualizan la gráfica y luego describen las características de los sólidos geométricos en una exposición
		Fase 2: Orientación dirigida	Visualiza la generación del cilindro, cono y esfera	Sesión de aprendizaje 2. Visualizando con GeoGebra la generación y el desarrollo del cilindro, cono y esfera.	A. Con GeoGebra diseñan la simulación de la generación de cilindro, esfera y cono A. Con GeoGebra diseñan el desarrollo del cilindro, cono y esfera
	NIVEL 1 Análisis	Fase 3: Explicación (explicitación)	Visualiza e identifica las superficies laterales y totales del cilindro, cono y esfera	Sesión de aprendizaje 3. Determinamos las superficies laterales del cilindro, cono y esfera, utilizando el GeoGebra	A. Los estudiantes grafican con el GeoGebra el desarrollo del cilindro, cono y esfera, luego visualizan y describen la superficie lateral y total del cilindro y cono. A. Determinan el área lateral y total del cilindro, cono y esfera,
	NIVEL 2 Orientación o clasificación	Fase 4: Orientación libre	Visualiza y razona para hallar el volumen del cilindro, cono y esfera	Sesión de aprendizaje 4. Determinamos los volúmenes del cilindro, cono y esfera, utilizando el GeoGebra	A. Grafica con GeoGebra, el cilindro, cono y esfera, luego visualiza para describir con sus propias palabras, la forma de hallar el volumen A. Determina el volumen del cilindro, cono y esfera, utilizando las fórmulas matemáticas
	NIVEL 3 Deducción formal	Fase 5: Integración		Sesión de aprendizaje 5. Demostrando las fórmulas geométricas de áreas y volúmenes de sólidos geométricos	Aplicando el razonamiento geométrico demuestran las fórmulas del área y volumen del cilindro, cono y esfera.

Nota. Tomado de Merma (2015)

Desarrollo de la secuencia didáctica de la estrategia didáctica

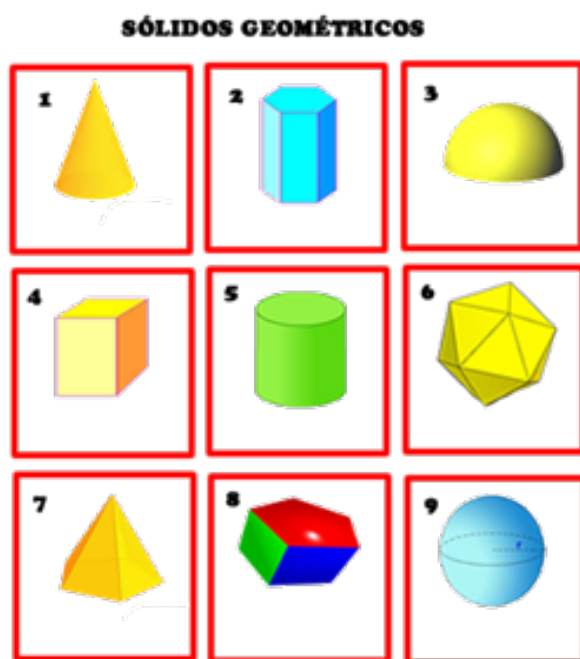
Sesión de aprendizaje 1

En la primera sesión, se busca introducir a los estudiantes en el reconocimiento de los sólidos geométricos, identificando elementos y describiendo características clave. Para ello, se seguirán las fases de visualización establecidas en el marco teórico. La primera actividad implica que los estudiantes utilicen GeoGebra para graficar sólidos de revolución, permitiéndoles interactuar con las figuras y familiarizarse con el software. A través de esta representación gráfica, podrán identificar los elementos y describir las características de cada sólido.

A continuación, presentamos la secuencia didáctica que combina las fases del modelo Van Hiele, los pasos para el desarrollo de la visualización espacial y las estrategias para fomentar el razonamiento geométrico:

Fase 1. Información. Motivación. A través de la observación visual, los estudiantes analizan una lámina didáctica que exhibe diversos sólidos geométricos.

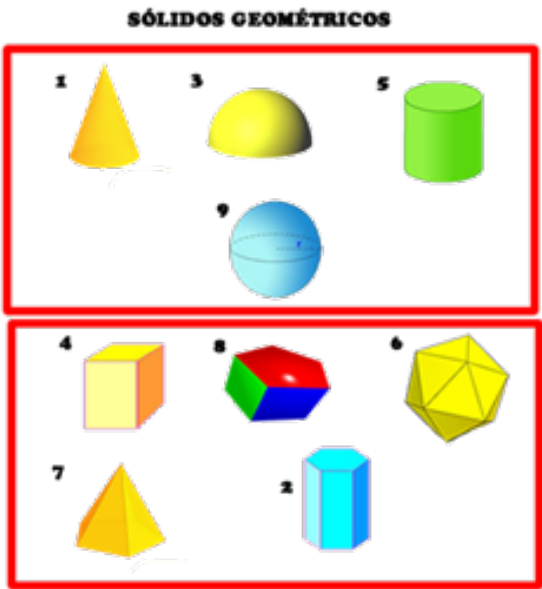
Figura 23: Visualización de sólidos geométricos



Nota. Tomado de Merma (2015)

Después, con la colaboración de los estudiantes, se organizan los sólidos en dos conjuntos, tomando en cuenta las similitudes en sus características. La clasificación de los sólidos podría ser la siguiente:

Figura 24: Agrupación de los sólidos geométricos



Nota. Tomado de Merma (2015)

Recuperación de saberes previos

Con la colaboración activa de los estudiantes y utilizando un lenguaje natural, describen las características de los conjuntos de sólidos previamente clasificados. Posteriormente, asignan un nombre identificativo a cada grupo de sólidos.

Nombre:

Características comunes

.....

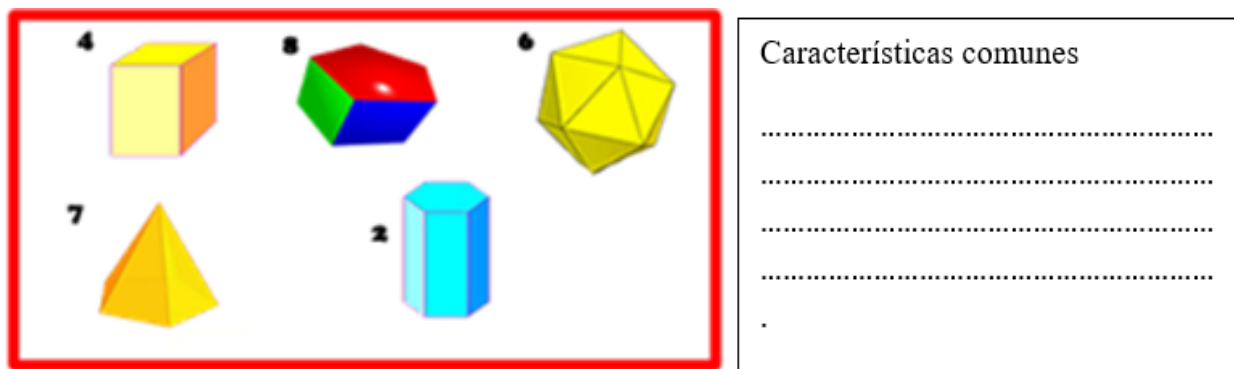
.....

.....

.....

.

Nombre:.....



Nota. Tomado de Merma (2015)

Conflicto cognitivo

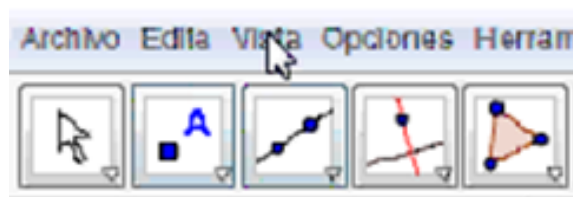
- ¿Qué denominación reciben las figuras agrupadas?
- ¿Qué sólidos representan los cuerpos redondos?
- ¿Cómo se les llaman a los cuerpos redondos?
- ¿Qué figuras representan a los sólidos de revolución?
- ¿Qué elementos y características, tienen los sólidos de revolución?

Fase 2. Orientación dirigida. El docente, con el propósito de llevar a cabo la Interpretación de Formación Figural (IFF), solicita a los estudiantes que utilicen GeoGebra para graficar el cilindro en una vista tridimensional. Posteriormente, se les pide que identifiquen los elementos y características del cilindro, siguiendo una serie de pasos específicos.

Primero, deben abrir el programa GeoGebra.

Segundo, direccionar el cursor a la ficha vista y clicar.

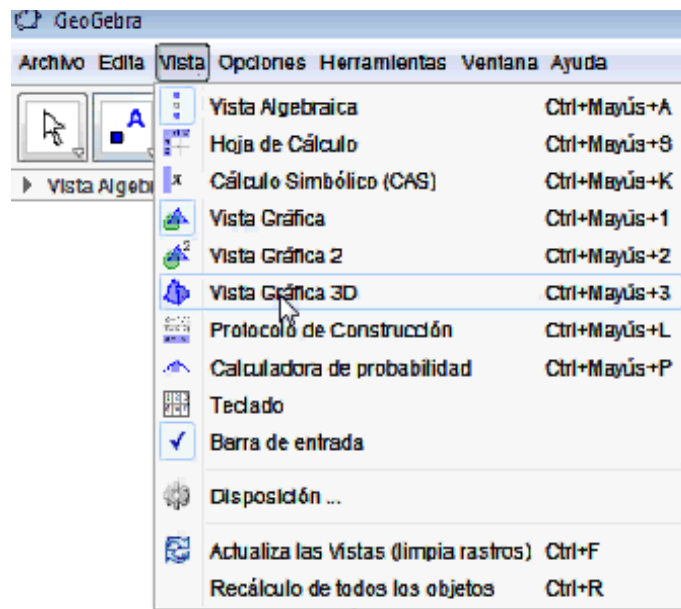
Figura 25: Segundo paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Tercero, seleccionar la vista 3D y clicar para ingresar al entorno tridimensional.

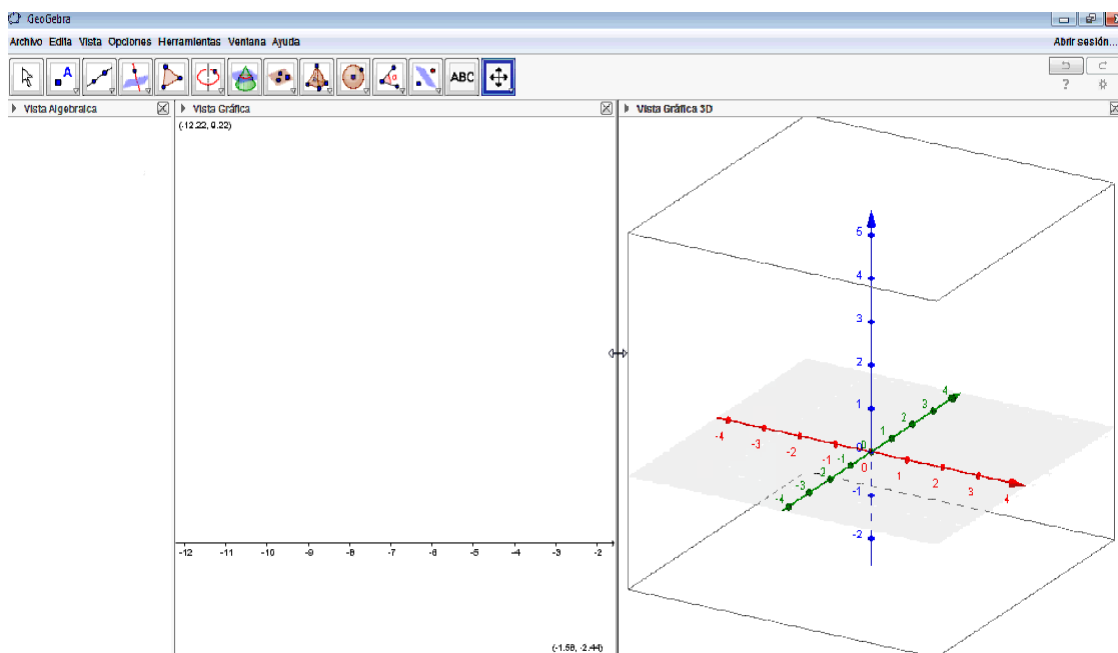
Figura 26: Tercer paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Cuarto, luego de clicar, se observa el entorno de trabajo.

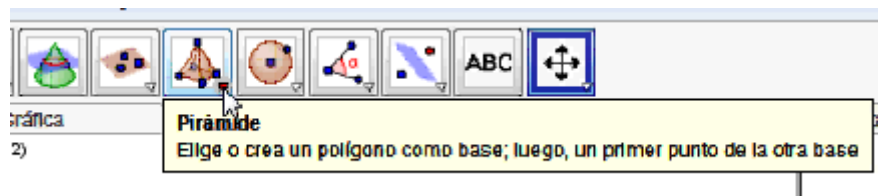
Figura 27: Cuarto paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Quinto, al visualizarse el entorno 3D, direccionar el cursor en el grupo de graficar sólidos.

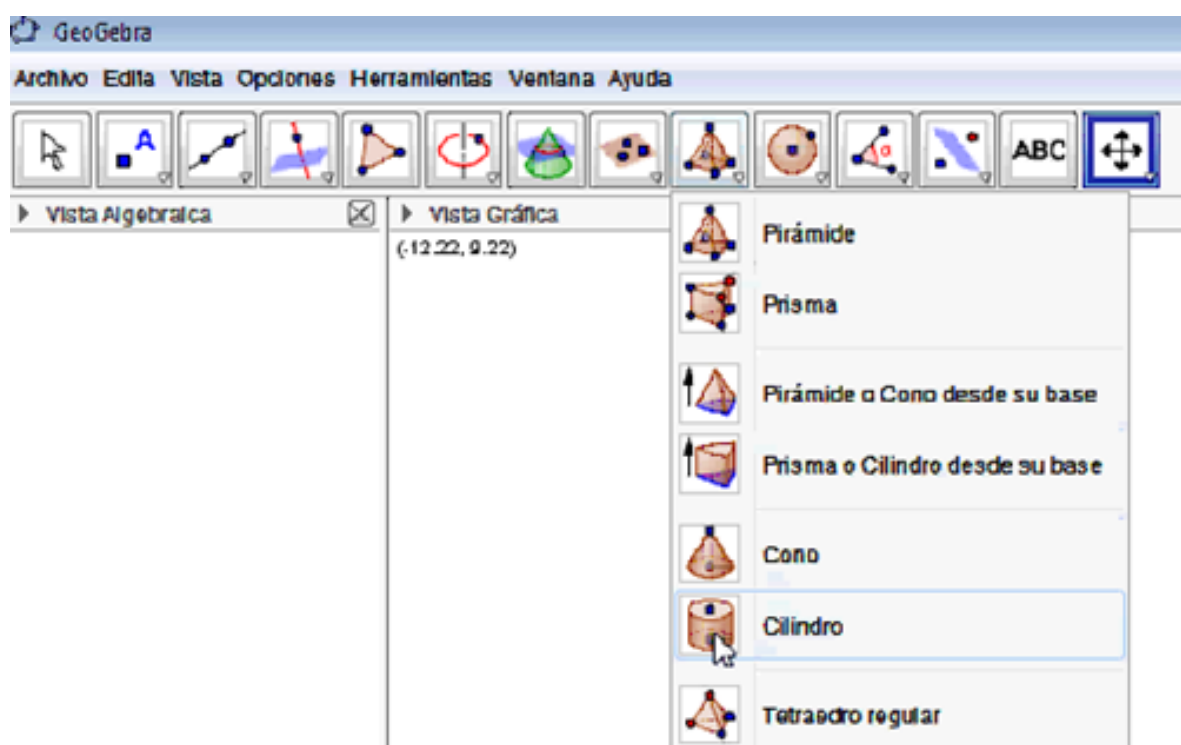
Figura 28: Quinto paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Sexto, seleccionar el sólido cilindro.

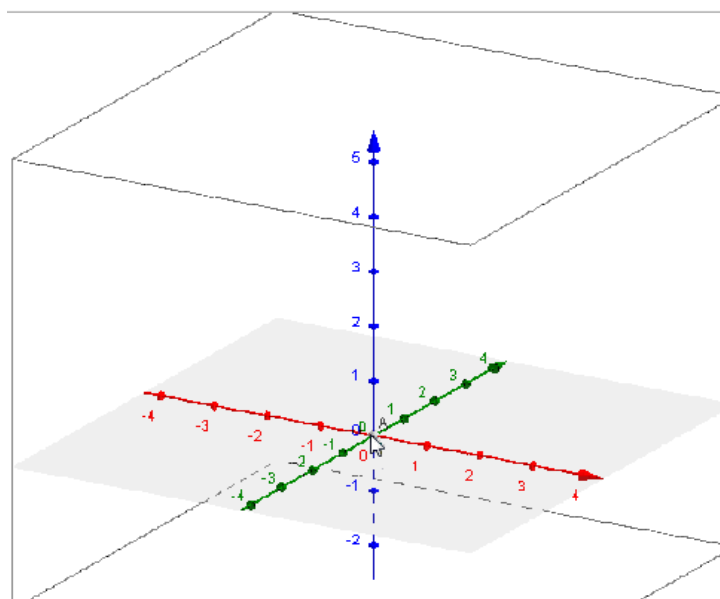
Figura 29: Sexto paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Séptimo, direccionar el cursor en el origen del eje tridimensional, para localizar el centro de la base cilíndrica.

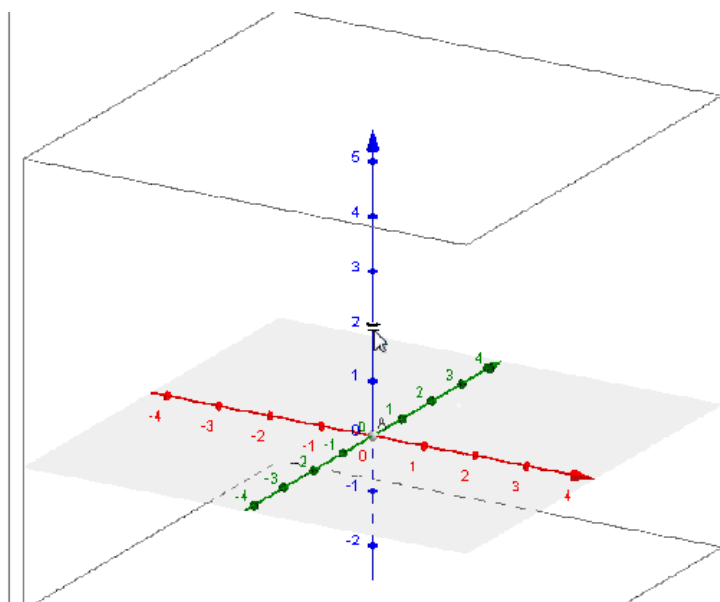
Figura 30: Séptimo paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Octavo, Al instante situar el cursor en el eje “z”, luego diseñar un punto y, así, formar el segmento AB, conocido como la altura del cilindro.

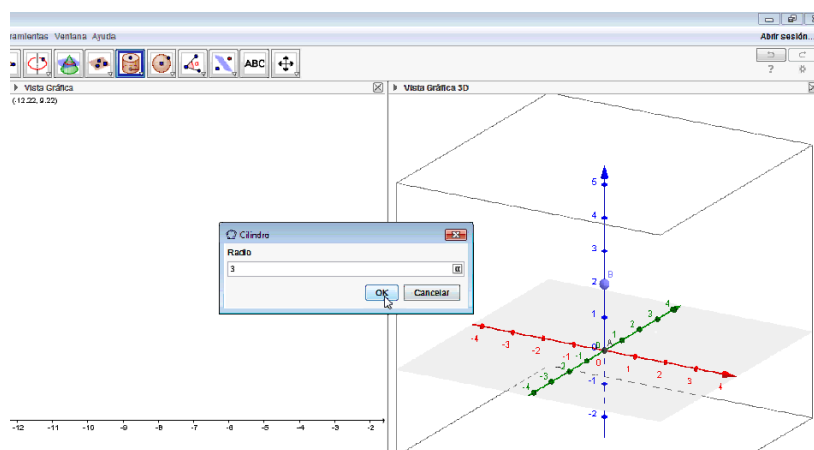
Figura 31: Octavo paso uso de GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Noveno, al culminar la anterior acción, en la ventana emergente que sobresale se añade el valor de radio: $r=3$, luego seleccionar “OK”.

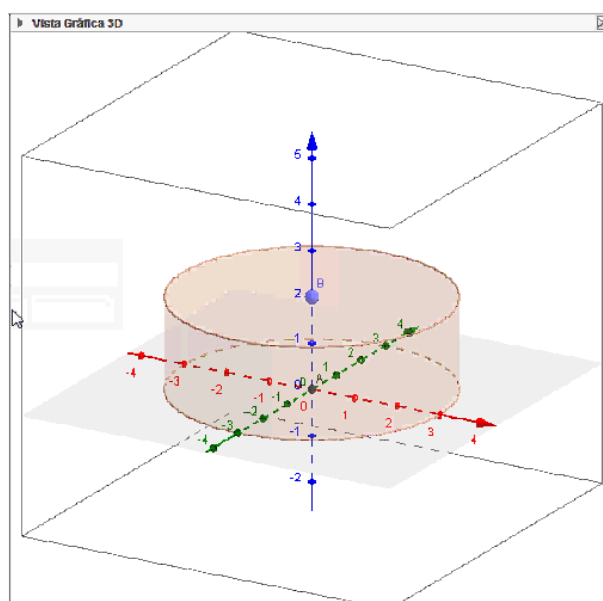
Figura 32: *Noveno paso uso de GeoGebra*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Décimo, al culminar los pasos, se visualiza el cilindro.

Figura 33: *Décimo paso uso de GeoGebra*



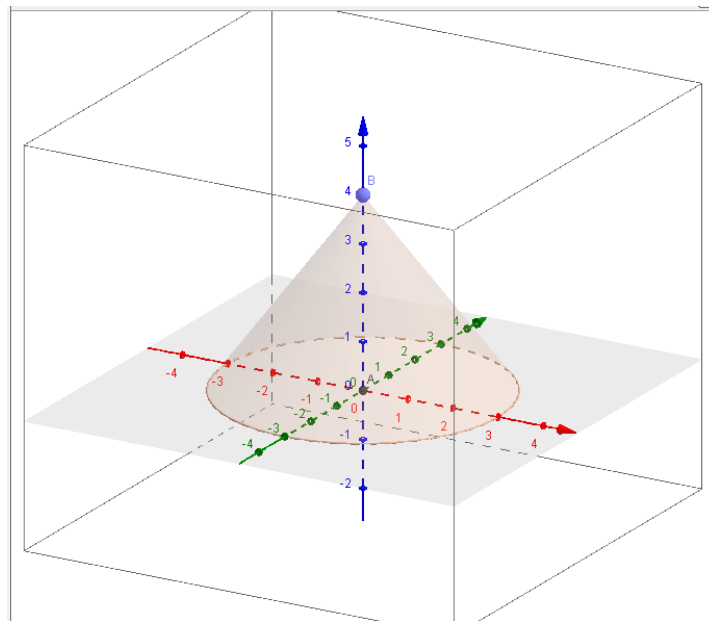
Nota. Tomado de Merma (2015)

El profesor, con el objetivo de fomentar el razonamiento a través del discurso natural y la visualización espacial, pide a los estudiantes que identifiquen las partes de los sólidos graficados. Los discentes utilizan recursos como textos del Ministerio de Educación e internet para buscar información sobre los sólidos representados, organizan la información y la comparan con los elementos identificados inicialmente.

Fase 3. Explicación. El profesor pide a tres voluntarios que expongan los elementos del cilindro. Con la participación del docente, concluyen identificando los elementos de cada sólido y sus características.

Fase 4. Orientación libre. Con el objetivo de explorar y reforzar el uso del GeoGebra en la vista tridimensional, el profesor pide a los estudiantes que grafiquen el cono y la esfera. Utilizan los mismos pasos que emplearon para graficar el cilindro. Aquí se presenta el resultado obtenido para el cono utilizando el GeoGebra.

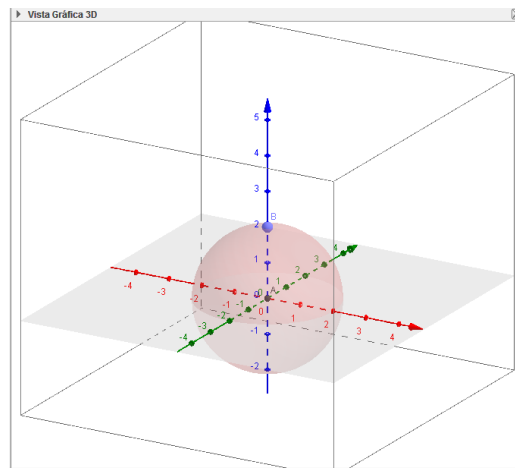
Figura 34: Resultado al usar GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

Al considerar esta gráfica, los estudiantes contemplan y determinan los elementos.

Figura 35: Esfera diseñada en GeoGebra



Nota. Tomado de Merma (2015)

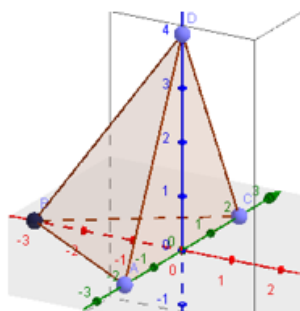
Fase 5. Integración. Se responde a las interrogantes inicialmente expuestas:

- ¿Qué denominación reciben las figuras agrupadas?
- ¿Qué sólidos representan los cuerpos redondos?
- ¿Cómo se les llaman a los cuerpos redondos?
- ¿Qué figuras representan a los sólidos de revolución?
- ¿Qué elementos y características, tienen los sólidos de revolución?

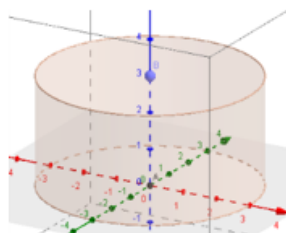
Evaluación de la sesión de aprendizaje 1

La evaluación de la primera sesión tiene como objetivo verificar el desarrollo de la visualización en los estudiantes, específicamente en la capacidad de visualizar e identificar los elementos y propiedades del cilindro, cono y esfera. Se plantean los siguientes ítems para evaluar este indicador.

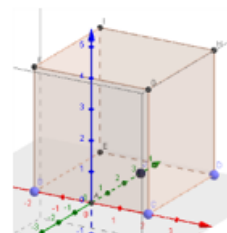
1. Visualiza y describe las características de cada uno de ellos:



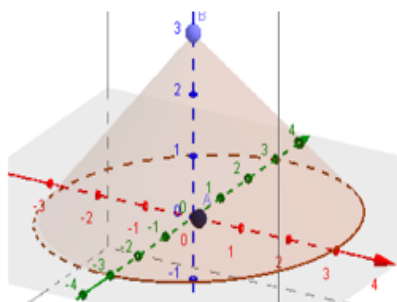
.....



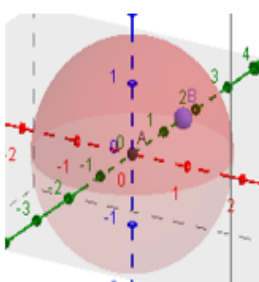
.....



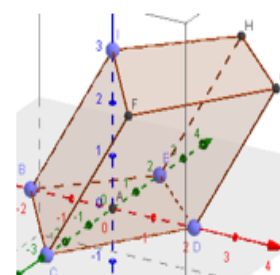
.....



.....

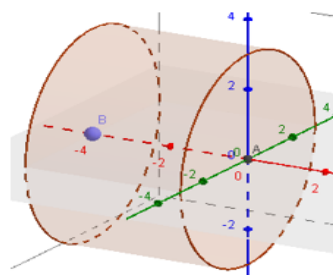
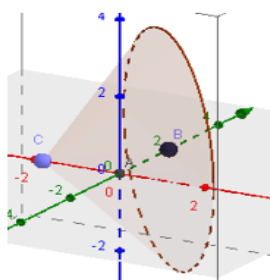


.....



.....

2. Visualiza y describe 3 diferencias que identificas, de los siguientes sólidos:



- A) A)
- A) B)
- A) C)

3. Grafica con GeoGebra los siguientes sólidos: un cilindro de radio 4 cm y altura 3 cm; un cono de altura 5cm y de base cuyo radio mida 3cm, y una esfera de radio 4cm. Presenta la gráfica al profesor.

Nota. Tomado de Merma (2015)

Sesión de aprendizaje 2

La segunda sesión tiene como objetivo que los estudiantes visualicen y razonen sobre la generación y desarrollo de sólidos de revolución. Se proponen dos actividades:

Actividad 1: Diseñar con GeoGebra la simulación de la generación del cilindro, cono y esfera. El propósito es desarrollar la visualización y el razonamiento geométrico para representar objetos tridimensionales a partir de bidimensionales.

Actividad 2: Desarrollar la visualización espacial y el razonamiento geométrico mediante la transformación del objeto en su desarrollo. El objetivo es que los estudiantes comprendan cómo está constituido el cilindro. La secuencia didáctica se presenta a continuación.

Secuencia didáctica de la sesión de aprendizaje 2

Fase 1. Información. Motivación. Se forma la palabra considerando el nombre del grupo de estudiantes mediante la técnica de rompecabezas silábicas.

En esta actividad, se emplea la técnica de tarjetas, donde a cada estudiante se le asignan tarjetas con sílabas o consonantes de los nombres de los sólidos de revolución. Los estudiantes deben colaborar para formar correctamente los nombres de cada sólido utilizando las tarjetas. La estructura de la actividad es la siguiente:

Figura 36: *Rompecabezas silábicas*



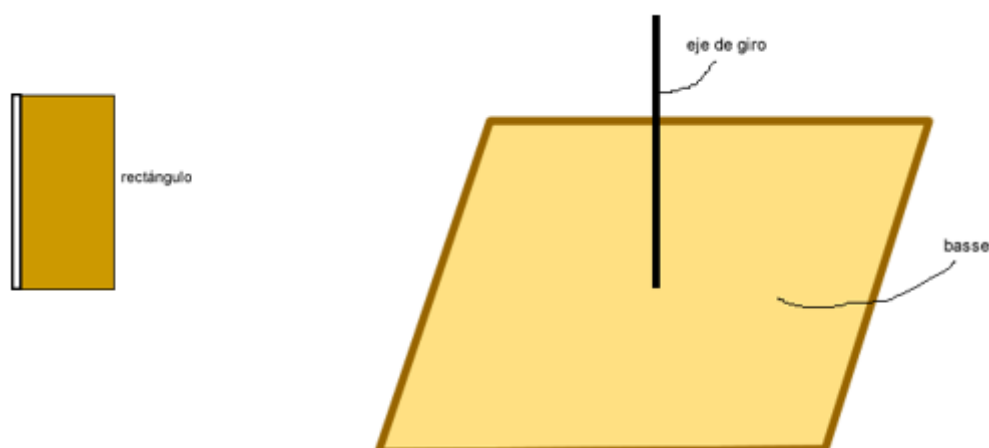
Nota. Tomado de Merma (2015)

El maestro proporciona los materiales adecuados a cada grupo de nombres.

Se entregaron los siguientes materiales:

El grupo denominado “Cilindro” toma un rectángulo y una estructura que incluye un eje de giro y una base de madera.

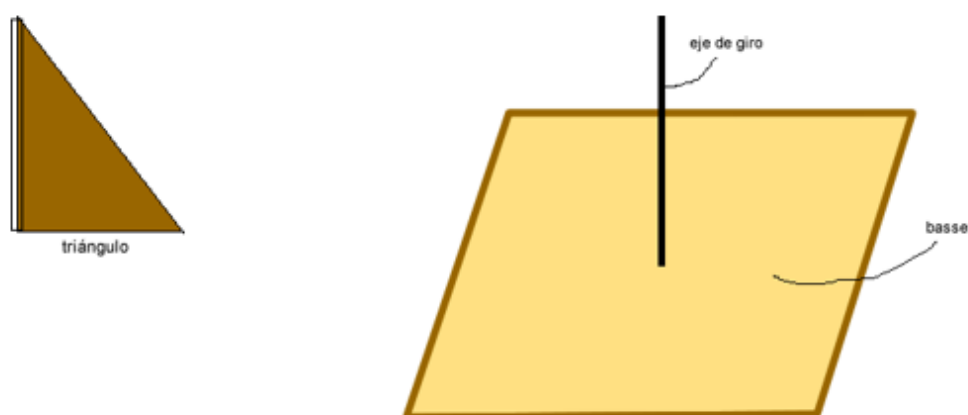
Figura 37: *Material del grupo “Cilindro”*



Nota. Tomado de Merma (2015)

El grupo identificado como “Cono” recibe un triángulo rectángulo y una estructura que incluye un eje de giro y una base de madera.

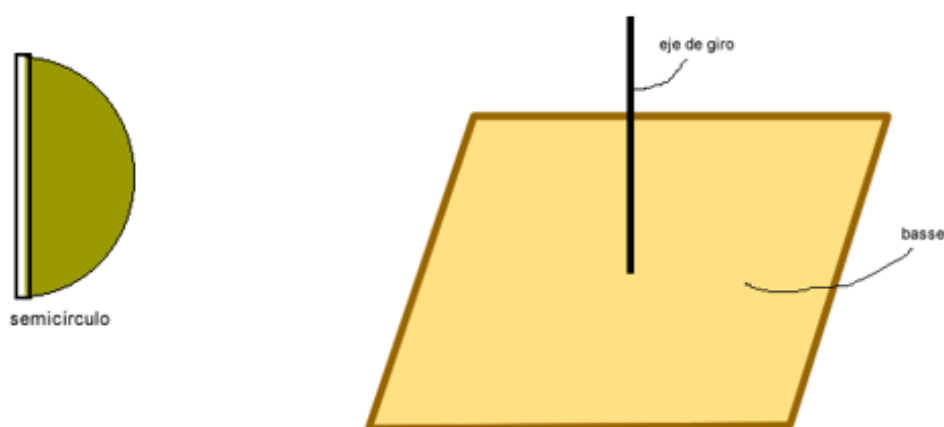
Figura 38: *Material del grupo “Cono”*



Nota. Tomado de Merma (2015)

El grupo denominado “Esfera” recibe un semicírculo y una estructura que incluye un eje de giro y una base de madera.

Figura 39: *Material del grupo “Esfera”*



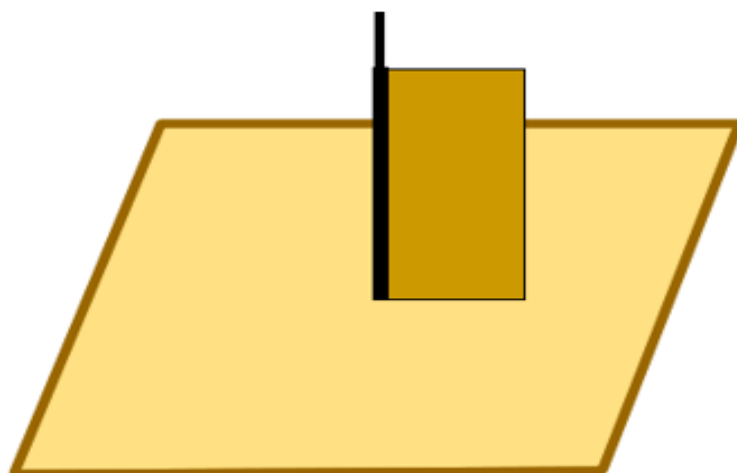
Nota. Tomado de Merma (2015)

Recuperación de saberes previos

Los discentes detallan las características de la figura representada.

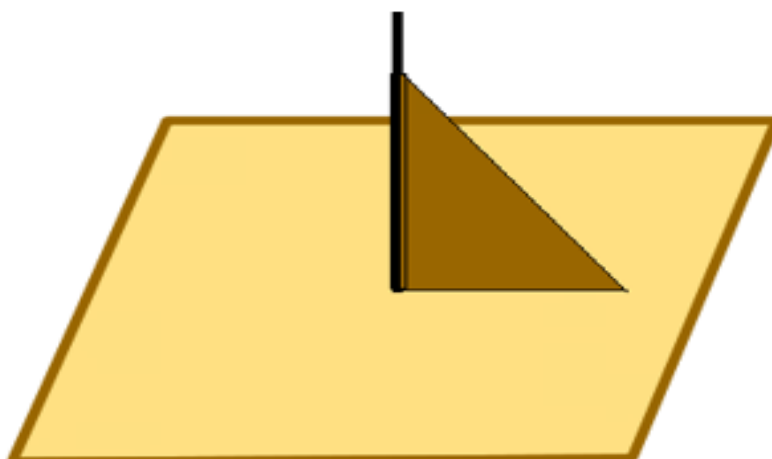
Estructuran los sólidos con los materiales brindados.

Figura 40: Estructura del grupo “Cilindro”



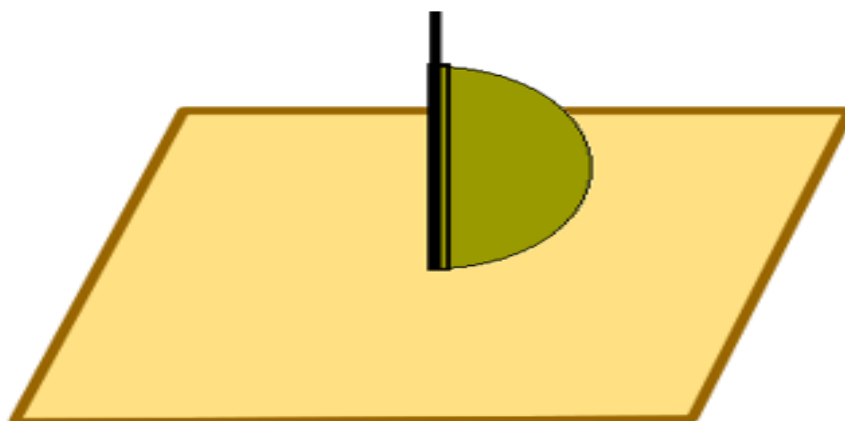
Nota. Tomado de Merma (2015)

Figura 41: Estructura del grupo “Cono”



Nota. Tomado de Merma (2015)

Figura 42: Estructura del grupo “Esfera”



Nota. Tomado de Merma (2015)

Se gira cada figura correspondiente a cada grupo y se contemple el giro las veces realizadas.

Conflicto cognitivo

El profesorado estima las siguientes interrogantes, correspondiente con la visualización:

- ¿Qué figura se genera al rotar 360° , un rectángulo por uno de sus lados tomados como eje?
- ¿Qué figura se genera al rotar 360° , un triángulo por uno de sus catetos tomados como eje?
- ¿Qué figura se genera al rotar 360° , un semicírculo por su diámetro tomado como eje?
- ¿Cuál sería el desarrollo gráficamente del cilindro, cono y esfera?

Fase 2. Orientación dirigida. El docente pide a los grupos que hagan rotar las figuras sobre el eje y pregunta qué sólido se forma en cada caso. Después, cada grupo expone y participa en un debate conjunto sobre los razonamientos presentados.

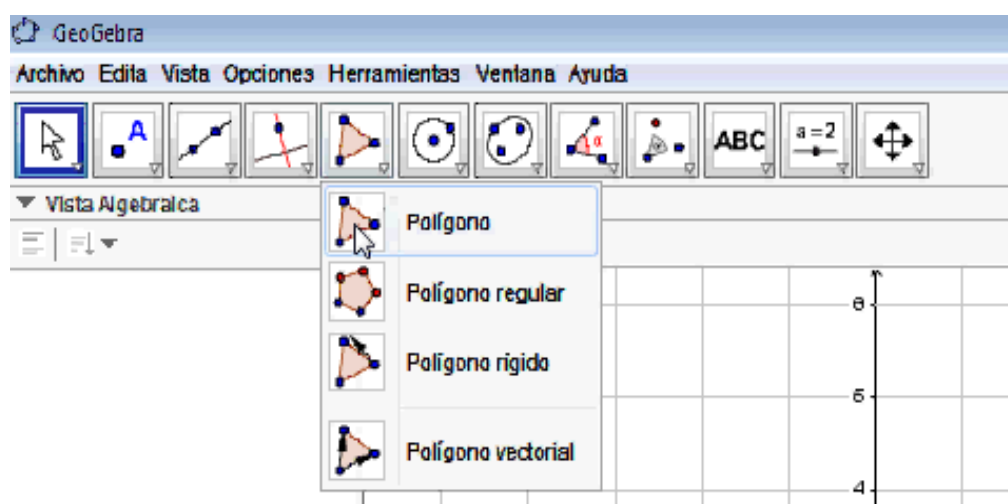
Fase 3. Explicitación. El docente, para verificar las afirmaciones de los grupos y reforzar la comprensión, pide a cada grupo que construya una simulación de generación de sólidos geométricos utilizando GeoGebra, siguiendo los siguientes pasos:

Diseño del cilindro.

Primero, se abre el programa GeoGebra.

Segundo, se grafica un rectángulo de 3 cm de largo por 2 cm de ancho en la vista bidimensional. Para ello, se selecciona el grupo graficador para polígono.

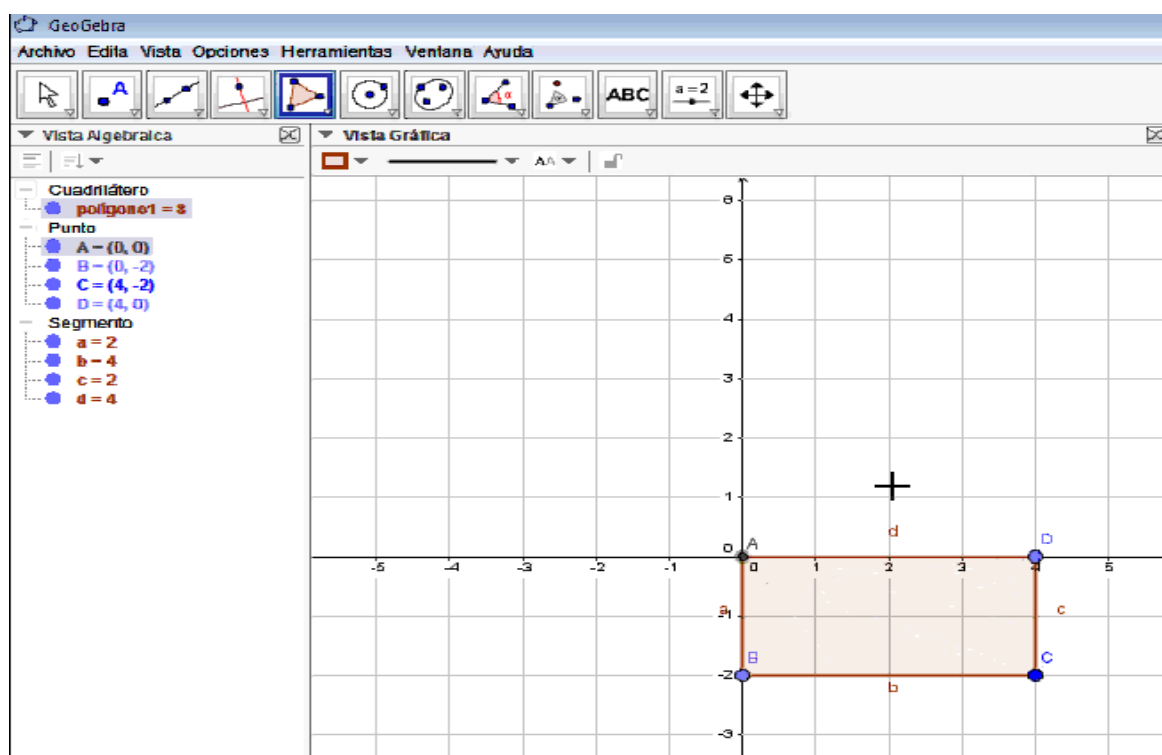
Figura 43: Segundo paso para diseñar cilindro



Nota. Tomado de Merma (2015)

Tercero, graficar un rectángulo en la vista bidimensional.

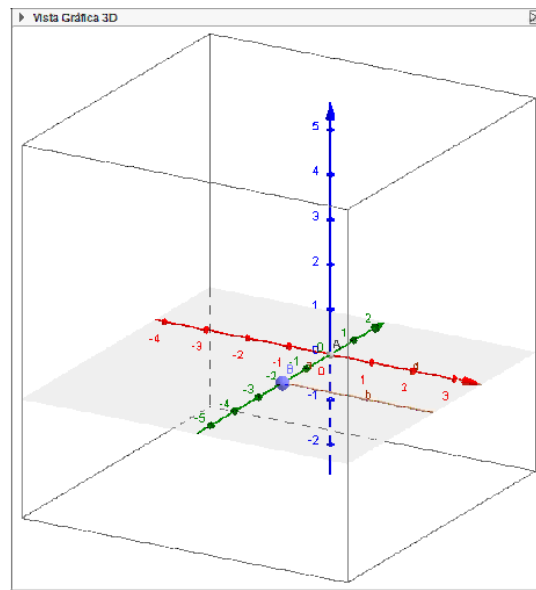
Figura 44: Tercer paso para diseñar cilindro



Nota. Tomado de Merma (2015)

Cuarto, se visualiza la imagen en la vista 3D.

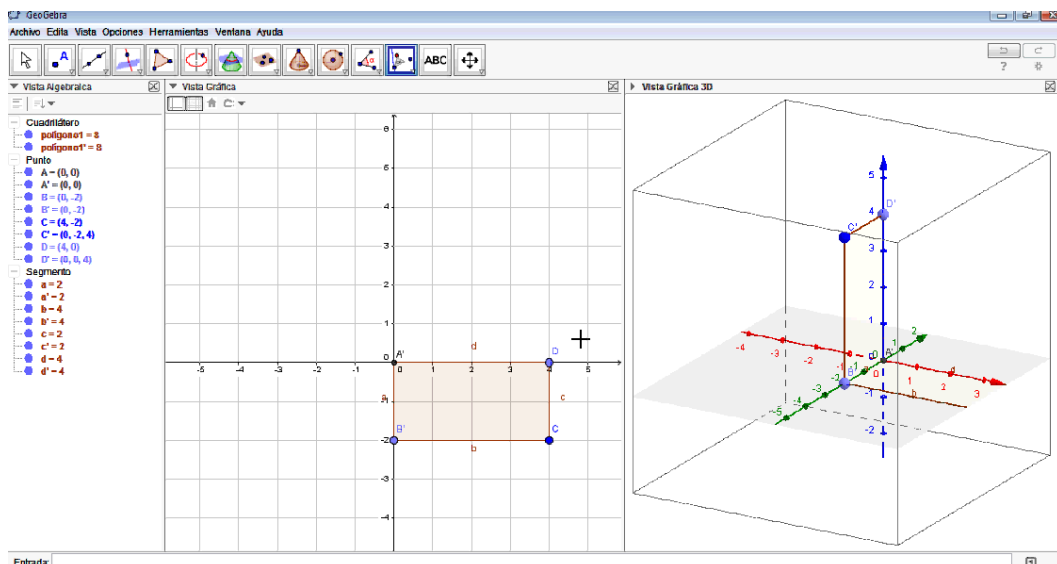
Figura 45: Cuarto paso para diseñar cilindro



Nota. Tomado de Merma (2015)

Quinto, al ingresar a la vista 3D, se direcciona el cursor al grupo de transformación del plano y elige la rotación alrededor del punto y selecciona el rectángulo diseñado y el eje donde se girará. Posterior a ello, se escribe 90° .

Figura 46: Quinto paso para diseñar cilindro

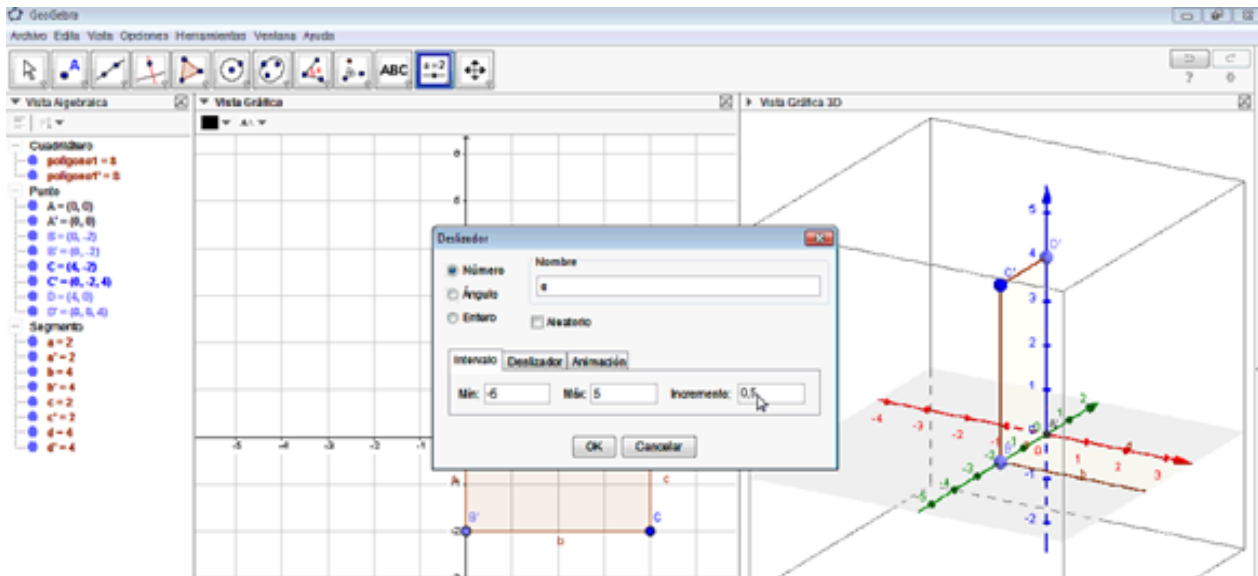


Nota. Tomado de Merma (2015)

Sexto, en la vista 2D, selecciona la herramienta deslizador, cuyas propiedades deben ser valor de aumento 0.5 en rótulo α .

Séptimo, en el entorno 3D, selecciona el grupo de transformaciones en plano y pulsa el rectángulo y el giro. Luego, emergerá una ventana, cuyo valor de deslizador será α .

Figura 47: Séptimo paso para diseñar cilindro



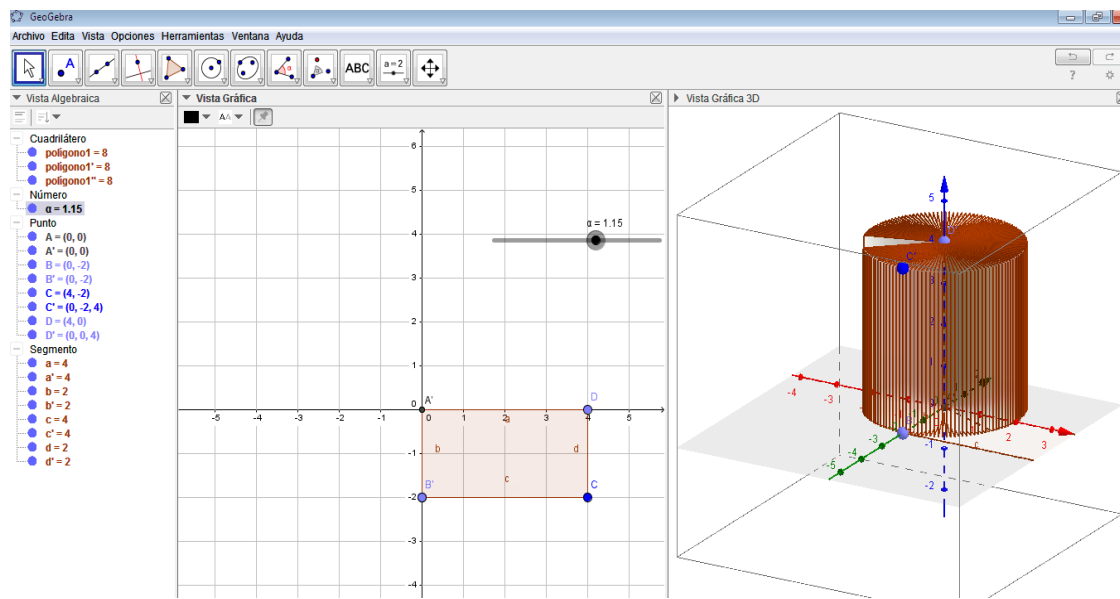
Nota. Tomado de Merma (2015)

Octavo, al mover el deslizador, se observa que el rectángulo gira alrededor del eje de giro. Si no ocurre, retrocede e intenta de nuevo, en todo caso comunicar al docente para que recibas ayuda.

Noveno, en la vista 3D, elige la herramienta rotación axial, luego ubica el rectángulo y selecciónalo junto con el eje de giro. Al emerger la venta, coloca el rótulo determinado.

Décimo, para finalizar, se pulsa el rectángulo al hacer clic derecho. Luego, selecciona rastro y, de manera continua, el deslizador y, después, animar.

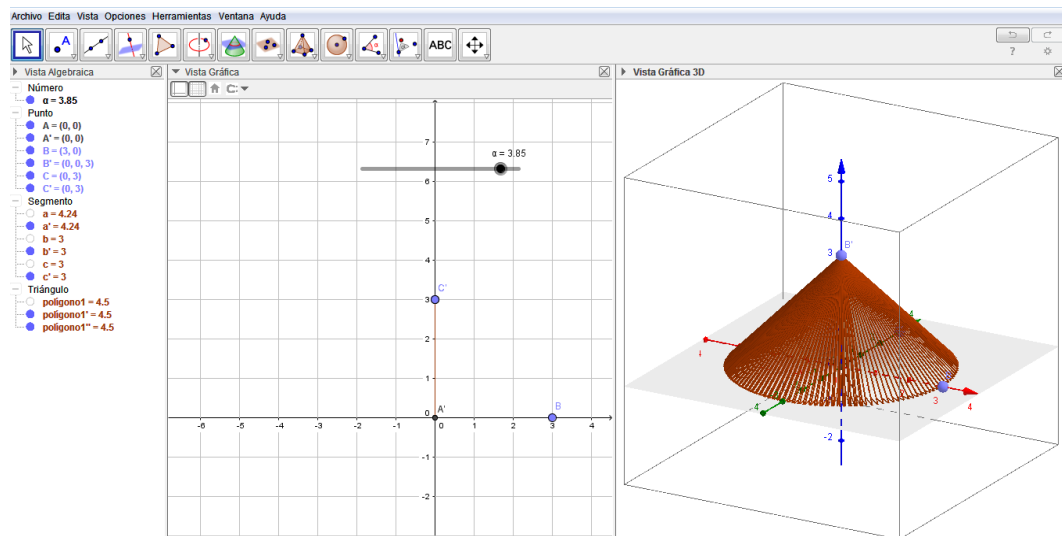
Figura 48: *Décimo paso para diseñar cilindro*



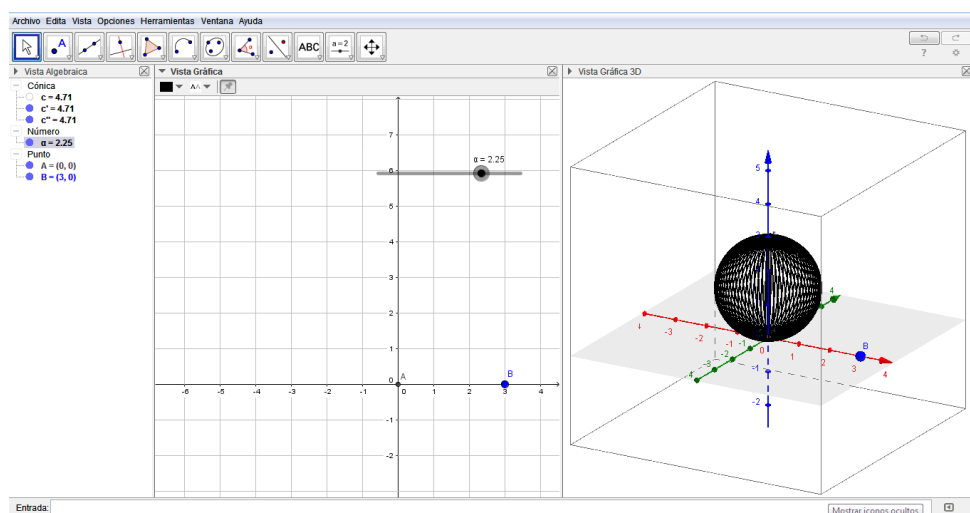
Nota. Tomado de Merma (2015)

Fase 4. Orientación libre. El docente pide a los estudiantes que utilicen GeoGebra para graficar la simulación de la generación del cono y la esfera, siguiendo los mismos pasos utilizados para construir el cilindro. La gráfica deseada es la siguiente:

Figura 49: *Generación del cono*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Figura 50: *Generación de la esfera*

Nota. Tomado de Merma (2015)

Fase 5. Integración. El profesorado determina que la idea inicial sea comparada con la actual simulación. La información es organizada respecto con cada sólido.

Las siguientes preguntas son resueltas por los estudiantes:

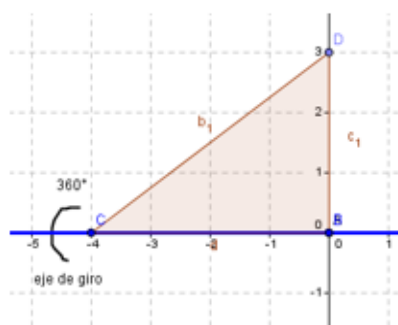
- ¿Qué figura se genera al rotar 360° , un rectángulo por uno de sus lados tomados como eje?
- ¿Qué figura se genera al rotar 360° , un triángulo por uno de sus catetos tomados como eje?
- ¿Qué figura se genera al rotar 360° , un semicírculo por su diámetro tomado como eje?
- ¿Cuál sería el desarrollo gráficamente de los sólidos de revolución?

Evaluación de la sesión de aprendizaje 2

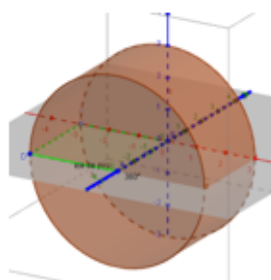
La evaluación tiene como objetivo verificar el desarrollo de la visualización y el razonamiento en relación con la generación de sólidos geométricos. Se proponen ítems similares a los utilizados en la prueba diagnóstica, y mediante este instrumento se evalúa el indicador de visualización de la generación del cilindro, cono y esfera.

1. Relaciona la figura que generan los sólidos geométricos

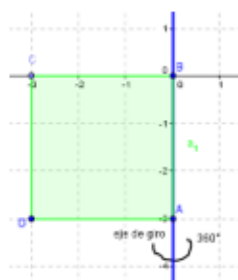
I



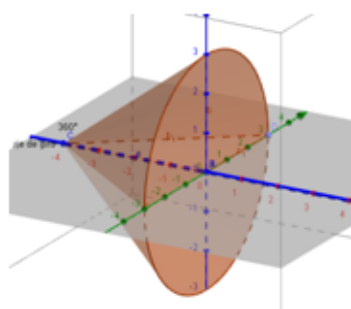
()



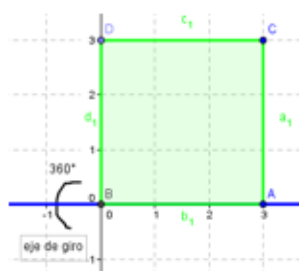
II



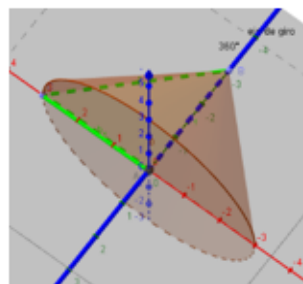
()



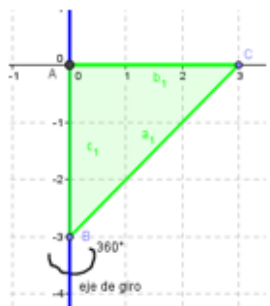
III



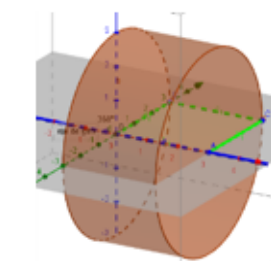
()



IV



()



Nota. Tomado de Merma (2015)

2. Representa con GeoGebra el desarrollo de un Cono, describiendo los elementos, y presenta la gráfica obtenida.

Sesión de aprendizaje 3

En la tercera sesión, las actividades se centran en que los estudiantes identifiquen las superficies laterales y totales del cilindro, cono y esfera. La primera actividad busca que, a partir del desarrollo visual de cada sólido, apli-

cando el discurso natural, los estudiantes deduzcan el área lateral y total. En la segunda actividad, se espera que utilicen la noción del área deducida en la actividad anterior para calcular las superficies laterales y totales de cada sólido de revolución.

Secuencia didáctica de la sesión de aprendizaje 3

Fase 1. Información. Motivación. Se distribuyen cuatro grupos de estudiantes.

Se brindan los siguientes materiales: un cilindro, un cono y una esfera.

Recuperación de saberes previos

Cada agrupación debe describir las propiedades y elementos de los sólidos brindados, luego elaborar una hoja de trabajo. Al finalizar, el docente postula las siguientes interrogantes:

- ¿Al extraer las bases del cilindro y extender la superficie lateral, cómo será la representación del desarrollo?
- ¿Al extraer la base del cono y extender la superficie lateral, cómo será la representación del desarrollo?

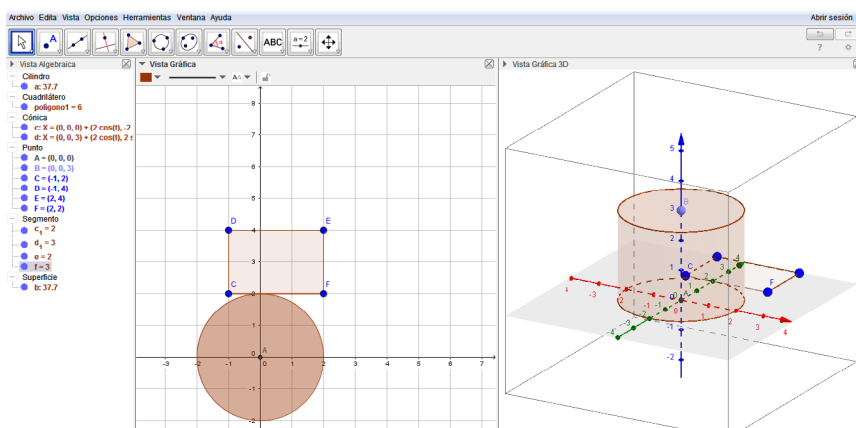
Conflicto cognitivo

Para motivar el estudio, se consideran las siguientes interrogantes:

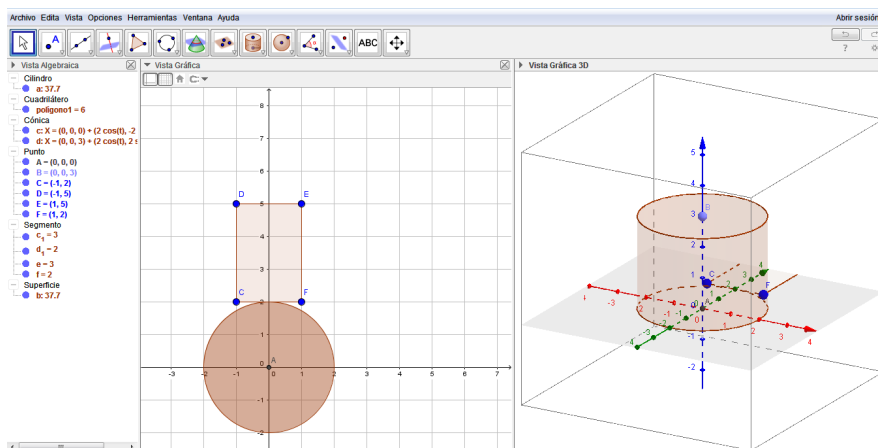
- ¿Qué figuras componen al cilindro y cómo determinamos el área lateral y total?
- ¿Qué figuras componen al cono y cómo determinamos el área lateral y total?
- ¿Qué figuras componen a la esfera y cómo determinamos el área total?

Fase 2. Orientación dirigida. El docente pide a los estudiantes que grafiquen los sólidos de revolución y, en el entorno bidimensional de GeoGebra, representen cómo se desarrollaría el cilindro al quitar las bases y extender la superficie lateral, así como también cómo se representaría el cono al quitar la base y extender la superficie lateral.

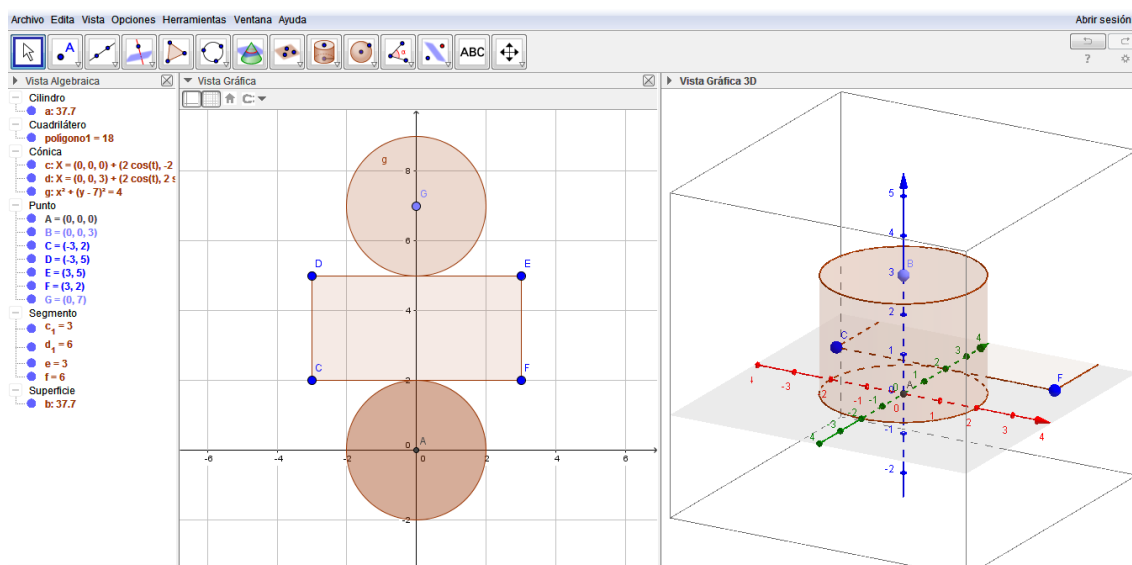
Figura 51: Posibles gráficos respecto al cilindro



Nota. Tomado de Merma (2015)



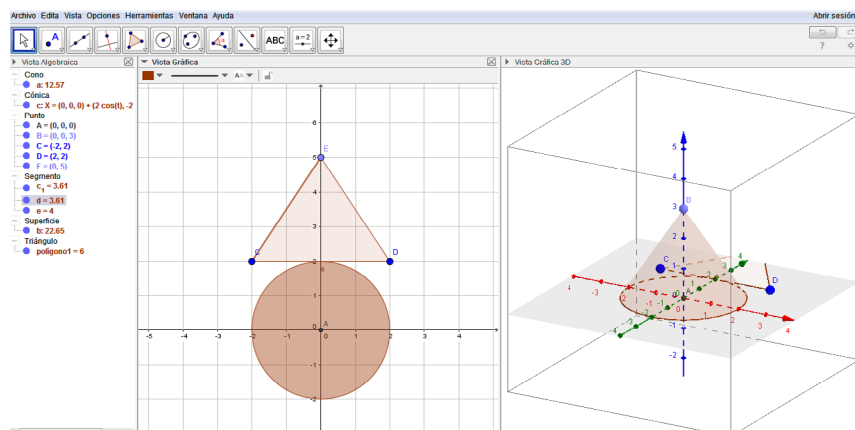
Nota. Tomado de Merma (2015)



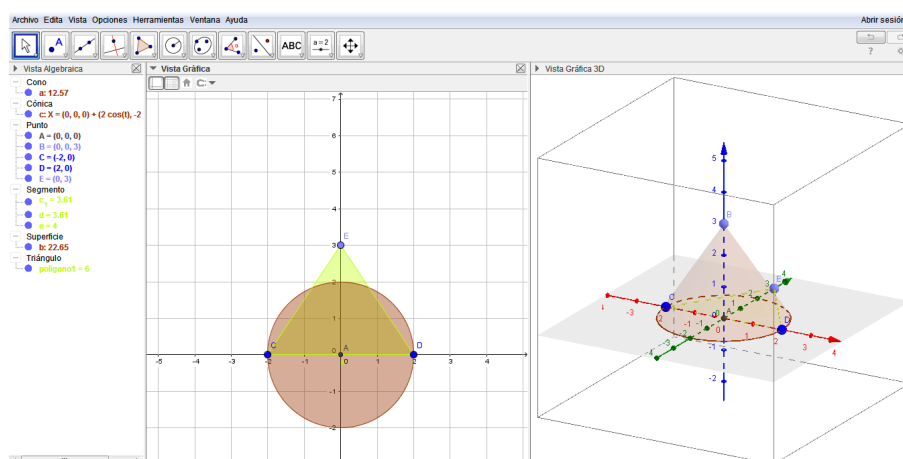
Nota. Tomado de Merma (2015)

Las gráficas pueden variar dependiendo de la visualización al simular el diseño del cilindro.

Figura 52: Posibles gráficos respecto al cono



Nota. Tomado de Merma (2015)



Nota. Tomado de Merma (2015)

Existen otras formas que pueden ser diseñadas por los estudiantes.

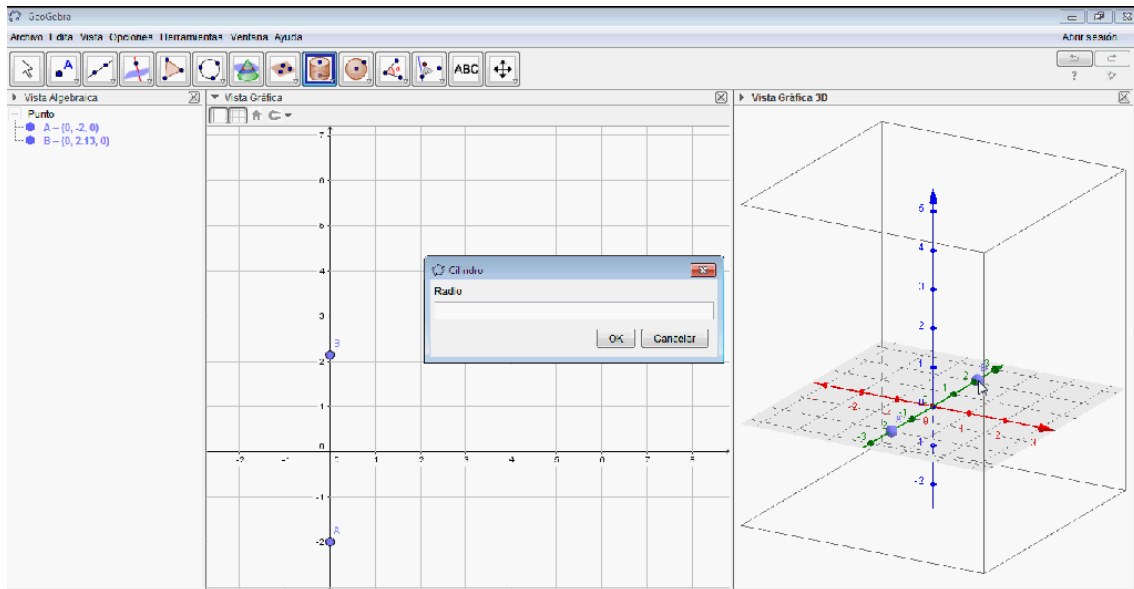
Fase 3. Explicitación. Cada grupo presenta las gráficas que crearon para representar el desarrollo del cilindro y del cono, proporcionando justificaciones para el proceso de representación. Al final de cada exposición, el docente fomenta la discusión entre los estudiantes.

Fase 4. Orientación libre. Para la visualización espacial, se considera la interpretación de formaciones. En este caso, los estudiantes deben presentar los diseños de los sólidos con GeoGebra bajo los siguientes pasos:

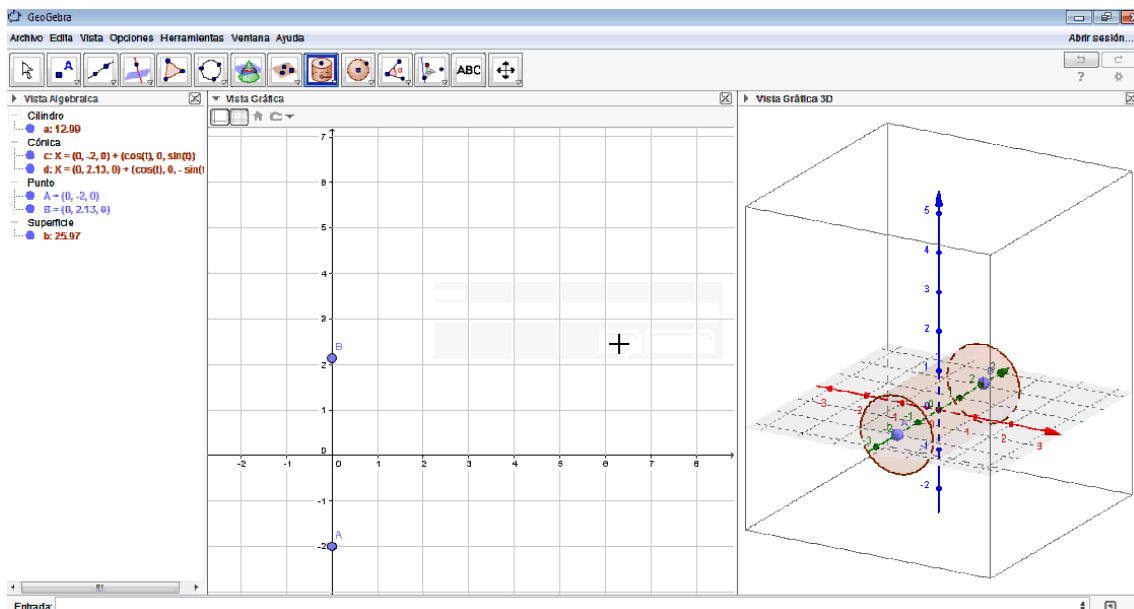
Primero, se abre GeoGebra.

Segundo, diseñar el cilindro en la vista 3D (considera los diez primeros pasos de la generación del cilindro de la primera sesión). Luego, se trazan los puntos en el eje “y” y $r=1$.

Figura 53: Segundo paso para el cilindro 3D



Nota. Tomado de Merma (2015)

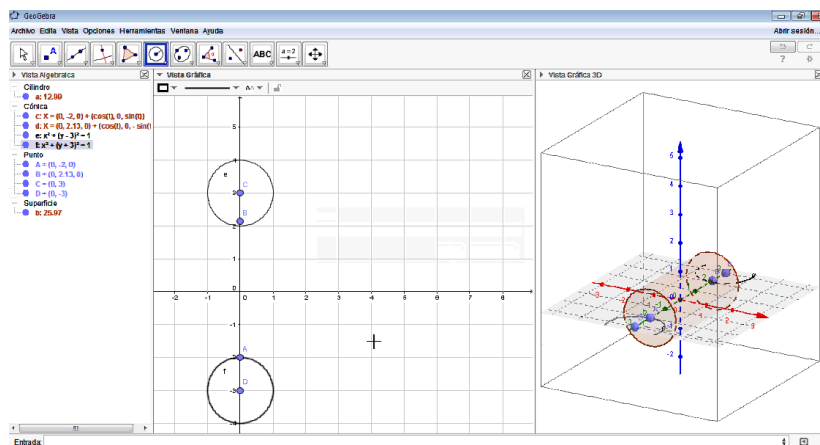


Nota. Tomado de Merma (2015)

Tercero, se trazan dos círculos de $r=1$, pasa por los puntos A y B.

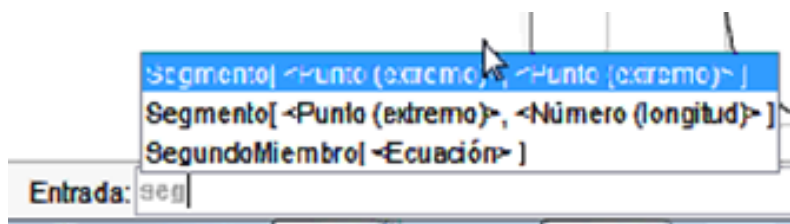
Nota. Tomado de Merma (2015)

Figura 54: Tercer paso para el cilindro 3D



Nota. Tomado de Merma (2015)

Cuarto, traza dos segmentos con longitud de π , con $r=1$; luego, se contempla la generación y se ingresa información en:



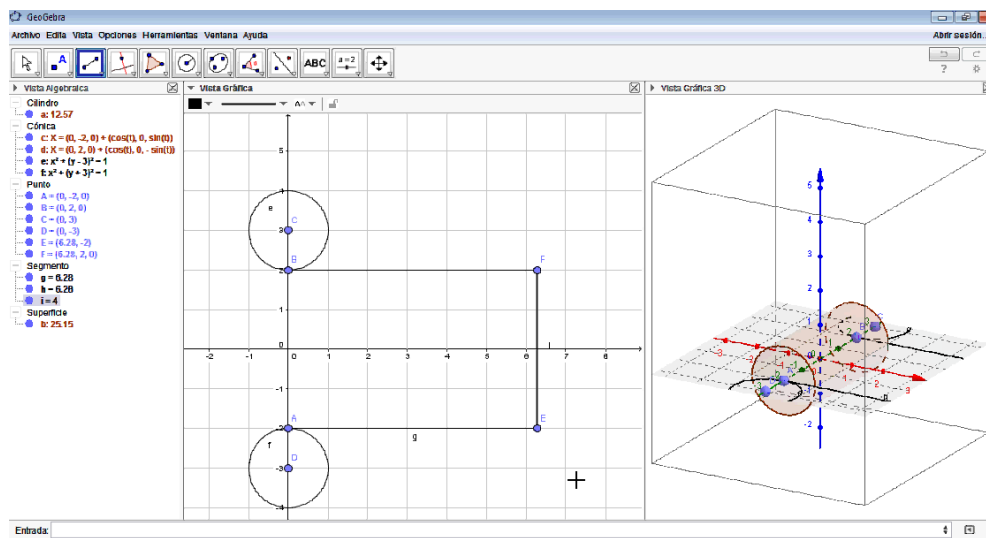
Nota. Tomado de Merma (2015)

El ingreso se contempla así:



Nota. Tomado de Merma (2015)

Figura 55: Cuarto paso para el cilindro 3D



Nota. Tomado de Merma (2015)

El cilindro se visualiza; por tanto, el docente plantea lo siguiente:

- ¿Cómo hallar el área lateral del cilindro, y el área total del cilindro?

La respuesta se alcanza mediante la visualización del diseño.

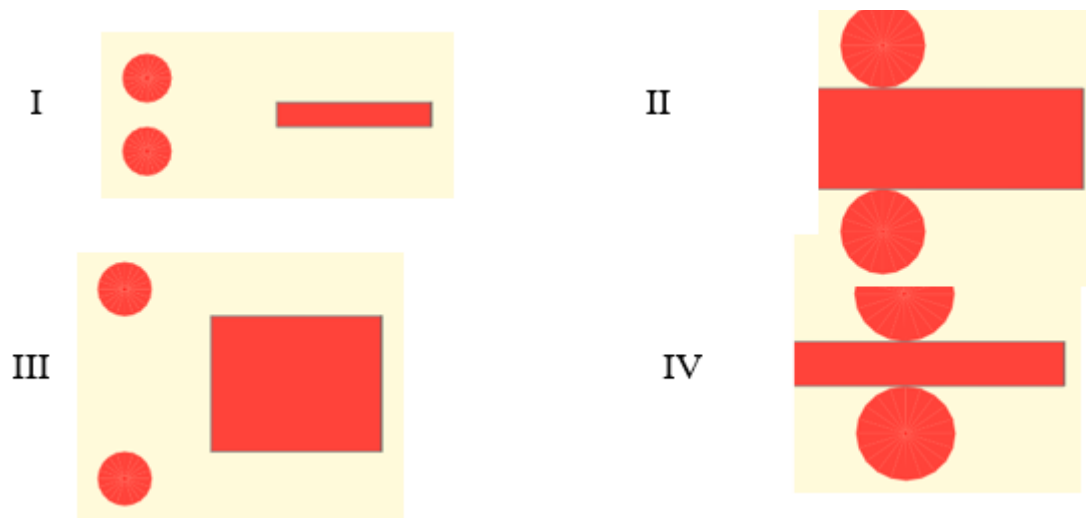
Fase 5. Integración. Se concluye respondiendo a lo siguiente:

- ¿Qué figuras componen, al cilindro y cómo determinamos el área lateral y total?
- ¿Qué figuras componen, al cono y cómo determinamos el área lateral y total?

Evaluación de la sesión de aprendizaje 3.

Con esta evaluación, se pretende comprobar el desarrollo de visualización y el razonamiento, referente a áreas laterales y totales, a partir del desarrollo del cilindro y cono, para lo cual se plantea los siguientes ítems.

1. ¿Cuál de las gráficas representa el desarrollo del cilindro?

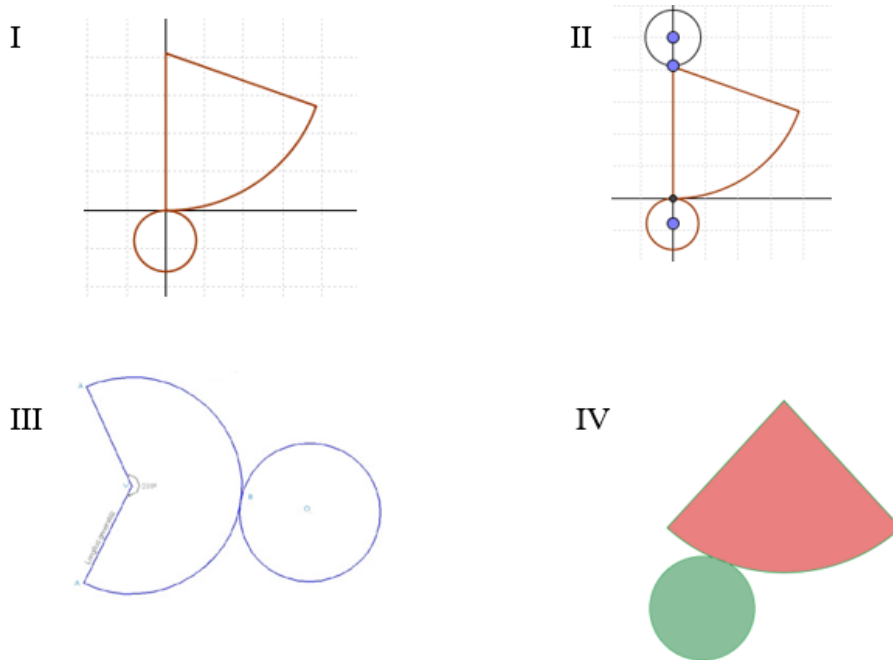


A) Sólo I B) sólo II y IV C) Todas D) N. A.

2. ¿Qué pasos sigues para determinar el área lateral y total del cilindro?

- a).
 b).
 c).
 d).
 e).

3. ¿Cuál(es) de las figuras representan el desarrollo del cono?



A) Solo II B) Todas C) sólo I y II D) I, III y IV

Nota. Tomado de Merma (2015)

Sesión de aprendizaje 4

En esta cuarta sesión de aprendizaje, se busca desarrollar el razonamiento geométrico mediante la deducción de las fórmulas del volumen para cilindro, cono y esfera. Para lograrlo, se plantean las siguientes actividades: en la actividad 1, los estudiantes utilizan GeoGebra para graficar el cilindro, el cono y la esfera, luego visualizan para deducir las fórmulas del volumen; en la actividad 2, determinan el volumen de cilindro, cono y esfera, con el objetivo de que los estudiantes comprendan la aplicabilidad de estas fórmulas.

Secuencia didáctica de la sesión de aprendizaje 4

Fase 1. Información. Motivación. Se visualiza la imagen de un tanque de agua, proyectado mediante programa de ingeniería.

Figura 56: *Tanque de agua*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Al observa el tanque, los estudiantes deben responder a la pregunta:

- ¿Cuántos litros de agua, contendrá el tanque de agua de nuestro distrito?

Recuperación de saberes previos

Se solicita la citación de objetos reales a los estudiantes, las características que dichos objetos deben presentar serán similares a las del cilindro, con y esfera. Se detallarán tales propiedades y elementos de cada uno.

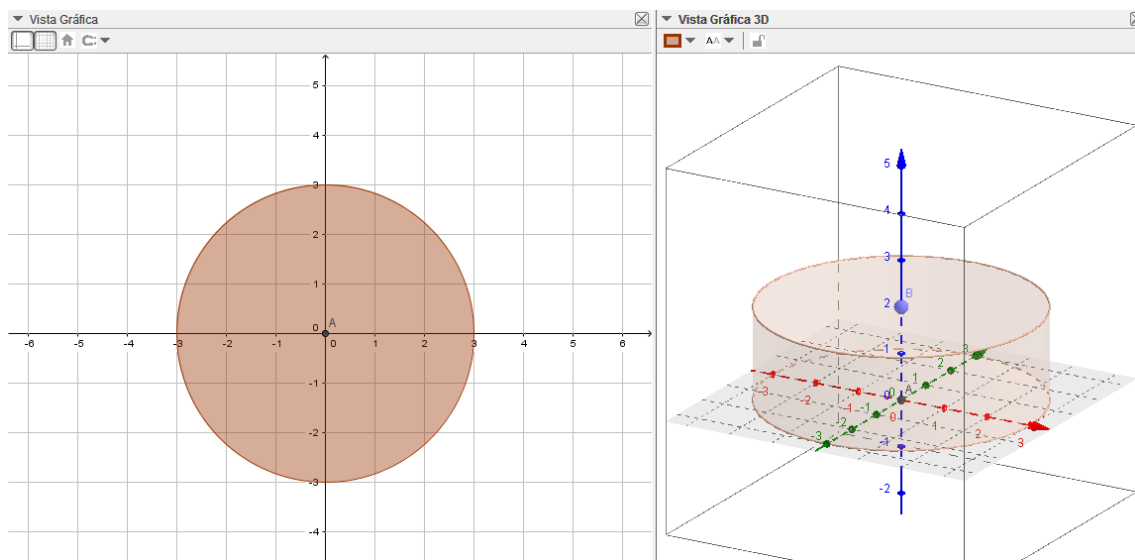
Conflicto cognitivo

Consideración la visualización, se responder a lo siguiente:

- ¿Cuánto será el volumen de las figuras citadas?
- ¿Qué procedimientos y fórmulas algebraicas se utilizarán?
- ¿Cómo asegurar que las fórmulas de los volúmenes del cilindro, cono y esfera son correctas?

Fase 2. Orientación dirigida. Los discentes contemplan la imagen del tanque y las medidas, luego diseñan una en el programa de GeoGebra, para averiguar el volumen.

Figura 57: Representación de la imagen del tanque propuesta por estudiantes

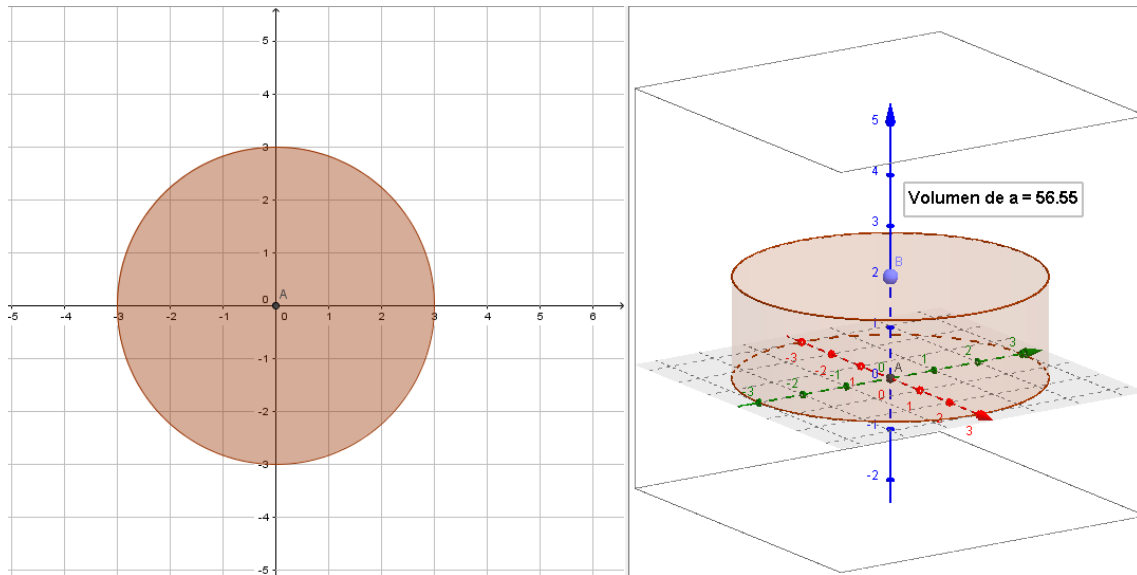


Nota. Tomado de Merma (2015)

En esta actividad, el docente guía a los estudiantes para que identifiquen los elementos del cilindro que han diseñado. Luego, utilizando el discurso natural, los estudiantes expresan cómo hallar el volumen del cilindro. Posterior-

mente, investigan información relacionada con el volumen y aplican la fórmula correspondiente para calcular el volumen de la figura diseñada. Finalmente, verifican sus resultados comparándolos con los obtenidos a través de GeoGebra.

Figura 58: *Volumen en GeoGebra*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Al aplicar la fórmula:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot (3)^2 \cdot 3$$

$$V = \pi \cdot 27$$

$$V = 84.82 \text{ cm}^3$$

Fase 3. Explicitación. Se solicita la participación de dos estudiantes para explicar el resultado en tal actividad.

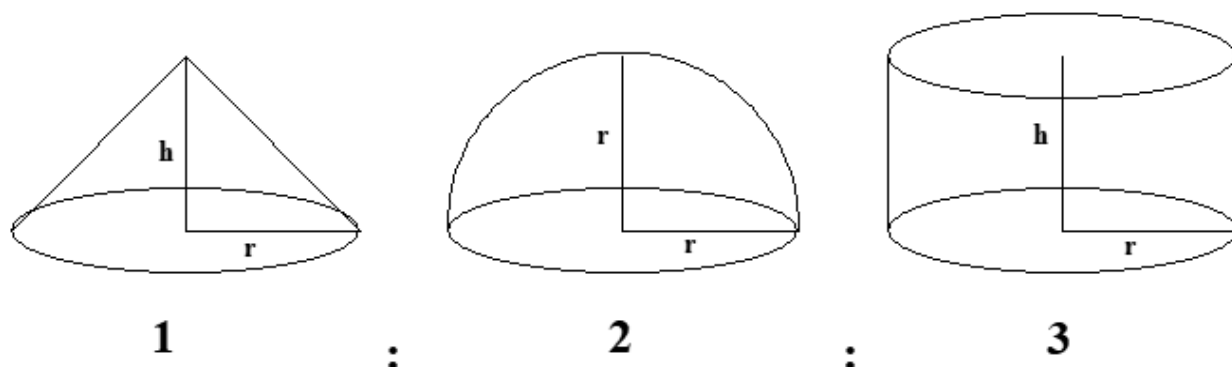
Fase 4. Orientación libre. Se solicita el diseño de un cono, con base de 4 cm y esfera con $r=3\text{cm}$. Asimismo, se encarga averiguar el volumen.

Se visualizan los textos del Ministerio de Educación, se organiza la información referente al volumen de los sólidos. Luego, se aplican las fórmulas

determinadas para el volumen de tales figuras para, posteriormente, comparar los resultados.

Con el texto, se demuestra las fórmulas de volúmenes encontradas en el cono y la esfera. Se considera la relación de Arquímedes:

Figura 59: *Relación de Arquímedes*



Nota. Tomado de Merma (2015)

Fase 5. Integración. Los discentes responden a las siguientes interrogantes:

¿Cuánto será el volumen de las figuras citadas?

¿Qué procedimientos y fórmulas algebraicas se utilizarán?

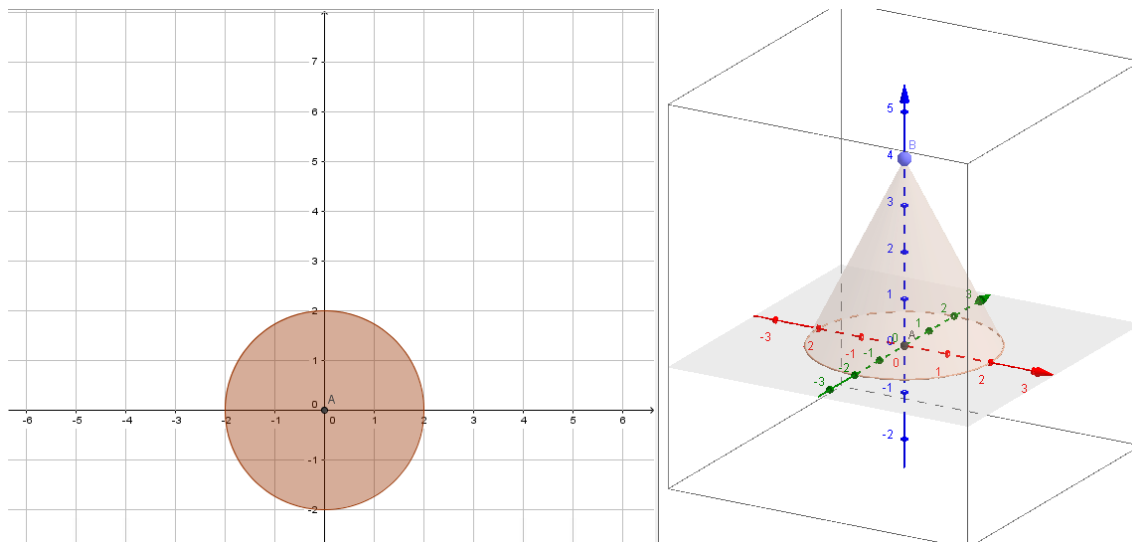
¿Cómo asegurar que las fórmulas de los volúmenes del cilindro, cono y esfera son correctas?

Evaluación de la sesión de aprendizaje 4

Esta evaluación tiene como objetivo verificar el desarrollo de la visualización y razonamiento de los estudiantes en relación con los volúmenes, utilizando gráficas reales. Se busca comprobar su capacidad para determinar el volumen del cono y la esfera. Las preguntas planteadas en la evaluación se orientan a este propósito específico.

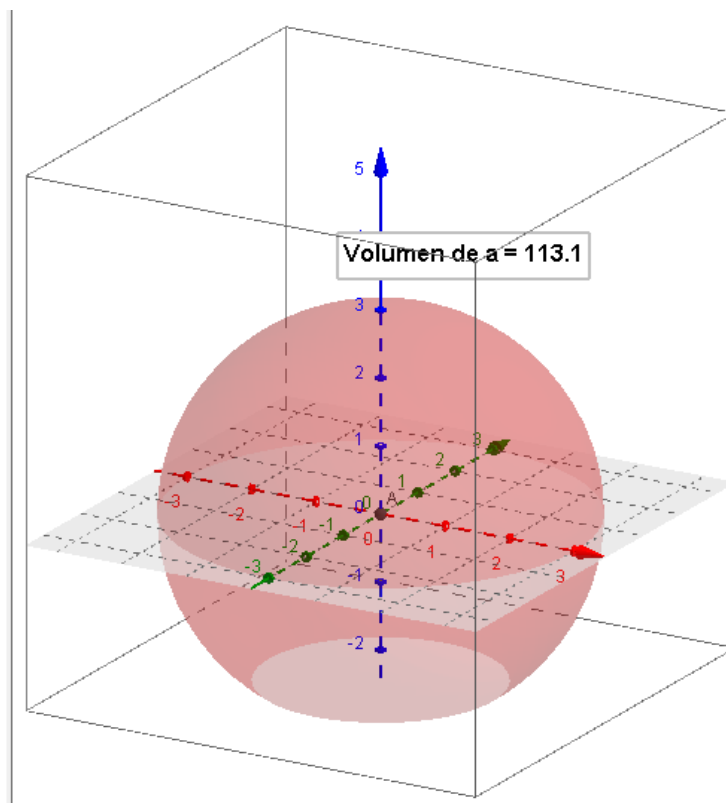
1. ¿Cuántos litros de agua contiene el tanque de agua del distrito de espinar?

2. El barquillo de helado típico de Espinar, tiene como base un círculo de radio cuya medida es 4cm. Halla el volumen del barquillo en metros cúbicos.
3. Halla el volumen de la siguiente figura.



Nota. Tomado de Merma (2015)

4. De la siguiente figura, determinar el radio de la esfera:



Nota. Tomado de Merma (2015)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar-Salinas, W., De Las Fuentes-Lara, M., Justo-López, A., y Martínez-Molina, A. (2021). Propuesta para el tratamiento de problemas de tasas de variación relacionadas mediante el uso de GeoGebra: Un estudio de casos. *Formación Universitaria*, 14(5), 95-106. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062021000500095>

Alsina, Á., García, M., y Torrent, E. (2019). La evaluación de la competencia matemática desde la escuela y para la escuela. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15(55). <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/294>

Antezana, R., Cayllahua, U., Yalli, E., y Rojas, Á. (2020). Modelo Van hiele y software GeoGebra en el aprendizaje de estudiantes en áreas y perímetros de regiones poligonales. *Horizonte de la Ciencia*, 10(18). <https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2020.18.406>

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arroyo, I., Mestre, J., Ruiz, R., Usó, N., y Pérez, M. (2023). Prototipo físico-manipulativo. Material Didáctico de Apoyo a la Enseñanza y el Aprendizaje de la Geometría Analítica en el Espacio. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, (114), 203-216. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9215777>

Arteaga, E., Medina, J., y Del Sol, J. (2019). El GeoGebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, 15(70), 102-108. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&tlng=pt.

Asiú, L., Asiú, A., y Barboza, Ó. (2021). Evaluación formativa en la práctica pedagógica: una revisión bibliográfica. *Conrado*, 17(78), 134-139. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442021000100134&lng=es&tlng=es.

Barreto-Salinas, E., Salinas-La-Torre, E., Gutiérrez-Ruiz, I., y Pacherrres-Valladares, A. (2022). Estrategias contextualizadas para mejorar el pensamiento geométrico en estudiantes de secundaria. *Prohominum*, 3(1), 55-76. <https://doi.org/10.47606/ACVEN/PH0046>

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C., y Salgado, M. (2022). Razonamiento y aprehensión ante una tarea geométrica: análisis de la pertinencia didáctica de una trayectoria de aprendizaje en educación infantil. *Bolema*, 36(72), 332-357. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a15>

Bolaños, A., Ruiz, M., Alonso, B., Bermúdez, I., y Bolaños, V. (2020). GeoGebra, Quizizz, PowToon y Kahoot como recursos tecnológicos en la enseñanza de la Geometría en séptimo año de la Educación General Básica costarricense. *Pensamiento Actual*, 20(34), 61-73. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7689770>

Bravo, V., y Hollisch, G. (2022). Un análisis de la implementación de la evaluación formativa en el aula virtual. En E. Aveleyra y M. Proyetti (coord.), *Escenarios y recursos para la enseñanza con tecnología: desafíos y retos* (pp. 170-180). Universidad Argentina de la Empresa. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8954597>

Campillo, J., Miralles, P., y Sánchez, R. (2019). La enseñanza de ciencias sociales en educación primaria mediante el modelo de aula invertida. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 33(3), 347-362. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27466132020>

Carranza, W., Manzaba, B., Cedeño, G., y Castro, A. (2023). Cognición geométrica euclidiana en el entorno hipermedial. *Revista InveCom*, 3(2), 1-21. <https://doi.org/10.5281/zenodo.8057821>

Carvalho, R., y Vireira, F. (2022). Ingeniería Didáctica para la Formación y Teoría de Situaciones Didácticas en el contexto de la enseñanza a distancia: una propuesta apoyada en el software GeoGebra para la enseñanza de volumen. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 14(3), 118-135. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v14i3.103>

Castañeda, L. (2021). Una experiencia de diseño de una tarea de evaluación sumativa en formato transmedia para formación inicial de profesorado. *RIED: Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 24(2). <https://doi.org/10.5944/ried.24.2.29148>

Castro, J. (2022). El estado de la alfabetización matemática: análisis desde las producciones y las subjetividades. *Revista Venezolana De Investigación En Educación Matemática*, 2(3), e202210. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i3.31>

Castro, Y. (2023). Competencias de pensamiento geométrico como parte del mejoramiento en el aspecto cognitivo de visualización, análisis y abstracción que poseen los estudiantes de Básica Secundaria. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(3), 4528-4550. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.6496

Cedeño, F. O., Chávez, J. F., y Parrales, Á. (2020). Estrategias didácticas para el aprendizaje de la multiplicación en las matemáticas en la educación general básica. *Revista Cognosis*, 5, 123-140. <https://doi.org/10.33936/cognosis.v5i0.2782>

Cenas, F., Gamboa, L., Blaz, F., y Castro, W. (2021). Geogebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 5(18), 382-390. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i18.181>

Chavarria-Pallarco, N. A. (2020). Modelo Van Hiele y niveles de razonamiento geométrico de triángulos en estudiantes de Huancavelica. *Investigación Valdiviana*, 14(2), 85-95. <https://doi.org/10.33554/riv.14.2.587>

Collazos, A. A., González, Y. M., y Monroy, M. (2023). Desarrollo del pensamiento geométrico a través de una secuencia didáctica apoyada con el uso de la herramienta GeoGebra. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(1), 3433-3459. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.4664

Cuervo, D. T, Fonseca, C. A., y Sepúlveda, O. (2021). La comprensión de los polígonos por medio del GeoGebra en estudiantes de grado séptimo. *Revista Boletín Redipe*, 10(7), 372-384. <https://doi.org/10.36260/rbr.v10i7.1374>

De La Rosa, A., Toro, K., Jaén, K., y Espinoza, E. (2019). El proceso de enseñanza-aprendizaje en las ciencias naturales: las estrategias didácticas como alternativa. *Revista Científica Agroecosistemas*, 7(1), 58-62. <https://aes.ucf.edu.cu/index.php/aes/article/view/243>

Delgado, A., y Vargas, J. (2019). *El modelado 3D para la enseñanza de los cuerpos geométricos en matemática de octavo año de Educación General Básica. Software interactivo* [tesis de titulación, Universidad de Guayaquil]. Repositorio Institucional UG. <http://repositorio.ug.edu.ec/handle/redug/41489>

Díaz, R., Acosta, J., y Checa, M. (2021). Software educativo basado en tecnología de pantalla táctil para la enseñanza en estudiantes con capacidades especiales. *Conrado*, 17(81), 396-404. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442021000400396&lng=es&tlng=en.

Enríquez, M. (2020). Características de las herramientas multimedia para el desarrollo de presentaciones interactivas. *Journal of Science and Research: Revista Ciencia e Investigación*, 5(1), 873-891. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7723208>

Estrada, A., Nesterova, E., y Vargas, V. (2021). Modelode razonamiento geométrico de Van Hiele. *MICA*, 5(10). <https://revista-mica.com/index.php/mica/article/view/63>

Falconi-Procet, X. (2021). Modelo de Van Hiele y su utilización para la enseñanza de la geometría. *Polo del Conocimiento: Revista Científico-profesional*, 6(3), 2261-22778. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7926874>

García, S. y López, O. L. (2008). *La enseñanza de la geometría: Materiales para apoyar la práctica educativa*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Gómez-Tone, H. (2019). Impacto de la enseñanza de la geometría descriptiva usando archivos 3D-PDF como entrenamiento de la habilidad espacial de estudiantes de Ingeniería Civil en el Perú. *Formación Universitaria*, 12(1), 73-82. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062019000100073>

Guerra, M., y Rodríguez, M. (2023). Una plataforma en línea mediada por el juego para el mejoramiento de la comprensión lectora. *CITAS: Ciencias, Innovación, Tecnología, Ambiente y Sociedad*, 9(1). <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9085598>

Gutiérrez, S., Ruiz, P., Pérez, G., y Ochoa, R. (2021). Acercad e ciencia, tecnología y sociedad en el desarrollo de software educativo para Estomatología. Holguín, Cuba. *Revista Cubana de Informática Médica*, 13(2). <https://www.medigraphic.com/cgi-bin/new/resumen.cgi?IDARTICULO=107552>

Ichaso, A. (2017). Enseñanza de resolución de problemas geométricos a los alumnos de 2º de la ESO, basada en una adaptación del método Bansho. *Publicaciones Didácticas*, (83), 116-148. <https://core.ac.uk/download/pdf/235855990.pdf>

- Labra, J. A., y Vanegas, C. M. (2022). Desarrollo del Razonamiento Geométrico de estudiantes de Enseñanza Media cuando abordan el concepto de Homotecia. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 25(1), 93-120. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2514>
- Maldonado, K., Vera, R., Ponce, L., y Tóala, F. J. (2020). Software educativo y su importancia en el proceso enseñanza-aprendizaje: software educativo y su importancia. UNESUM - Ciencias. *Revista Científica Multidisciplinaria*, 4(1), 123-130. <https://doi.org/10.47230/unesum-ciencias.v4.n1.2020.211>
- Martins, M., Posada-Bernal, S., Figueroa-Ángel, M., Román-Cárdenas, A. (2022). Teorias da aprendizagem na educação física na primeira infância: uma perspectiva colombiana. *Motricidades: Revista da Sociedade de Pesquisa Qualitativa em Motricidade Humana*, 6(3), 213-228, <https://doi.org/10.29181/2594-6463-2022-v6-n3-p213-228>
- Martínez, A., Blanco, N., Campo, E., y García, L. (2019). La gamificación de las matemáticas una estrategia de intervención en las habilidades lógico matemáticas HLM. *Revista Científica Signos Fónicos*, 5(2). <https://doi.org/10.24054/01204211.v2.n2.2019.3984>
- Merma, D. (2015). *Estrategia didáctica para desarrollar la visualización espacial y razonamiento geométrico, orientado por el modelo Van Hiele y Geogebra* [tesis de maestría, Universidad San Ignacio de Loyola]. Repositorio Institucional USIL. <https://hdl.handle.net/20.500.14005/2080>
- Morales, L., Zuta, L., Solis, B., Fernández, F., y García, M. (2023). El uso del Software GeoGebra en el aprendizaje de las matemáticas: Una revisión sistemática. *Referencia Pedagógica*, 11(1), 2-13. http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2308-30422023000100002&lng=es&tlng=es.
- Moreno-Moyano, R. A. (2024). Estrategia didáctica apoyada en GeoGebra para el aprendizaje de geometría en estudiantes de noveno grado en zona rural del Catatumbo. *AiBi Revista de Investigación, Administración e Ingeniería*, 12(1), 29-40. <https://doi.org/10.15649/2346030X.3671>
- Muñoz, S. T. (2020). Estrategias para mejorar el rendimiento académico de la asignatura de matemáticas. *Revista Iberoamericana De La Educación*, 3(3). <https://doi.org/10.31876/ie.v3i3.43>

Pereira, R., de Souza, C., Patino, D., y Lata, J. (2022). Plataforma de enseñanza a distancia de microcontroladores e internet de las cosas. *Ingenius. Revista de Ciencia y Tecnología*, (28), 53-62. <https://doi.org/10.17163/ings.n28.2022.05>

Ramírez, B., González, M., y Zambrano, R. (2023). Errores que cometen los estudiantes de tercero y cuarto año de enseñanza media en vistas ortogonales de figuras geométricas 3D. *Revista Chilena De Educación Matemática*, 15(2), 46-62. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v15i2.125>

Rangel-Luengas, J., y De Losada, M. (2023). Competencias o Competiciones: Análisis de las estrategias utilizadas por estudiantes del primer nivel de olimpiadas en la solución de problemas tipo pisa vs problemas tipo canguro matemático. *Espacio Lúdico*, 3(1). <https://revistas.uan.edu.co/index.php/espacio-matematico/article/view/1709>

Remolina-Delgado, E. (2021). Modelo Van Hiele Aplicado a la Geometría Descriptiva para el Fortalecimiento del Dibujo. *Revista Docentes 2.0*, 11(2), 90-96. <https://doi.org/10.37843/rtded.v11i2.252>

Rodríguez, D., Valarezo, C., y Velecela, D. A. (2021). El refuerzo académico en experiencias de aprendizaje para el Ámbito de relaciones lógico-matemáticas con GeoGebra. *Revista Scientific*, 6(21), 101-123. <https://doi.org/10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2021.6.21.5.101-123>

Rodríguez, P. (2020). La realidad aumentada como experiencia de enseñanza-aprendizaje constructivista. *Tecnología & Diseño*, (13). <https://revistatd.azc.uam.mx/index.php/rtd/article/view/74>

Santos, J. (2023). Reivindicando la Teoría de las Situaciones Didácticas: un paradigma de investigación vigente en la didáctica de las matemáticas. *Bolema*, 37(76), 625-642. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a12>

Sarrín, M. (2019). Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de Van Hiele: resultados de una experiencia. *Educación*, 28(54), 127-158. <https://dx.doi.org/10.18800/educacion.201901.007>

Solares-Rojas, A. (2021). La teoría de la objetivación. Una perspectiva vigo-
tskiana sobre conocer y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, de Luis Radford. *Educación Matemática*, 33(2), 280-284. <https://doi.org/10.24844/em3302.12>

Suárez, P., Salamanca, A., y Jaime, A. (2018). Estrategias mediadas por TIC para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. *Voces y Realidades Educativas*, (1), 99-114. <https://www.vocesyrealidadeseducativas.com/volumen/articulo%208.pdf>

Torres, M., Valera, P., Vásquez, M., y Lescano, G. (2022). Desarrollo de las competencias matemáticas en entornos virtuales. Una revisión sistemática. *Alpha Centauri*, 3(2), 46-59. <https://doi.org/10.47422/ac.v3i2.80>.

Uribe, M., y Retamal, P. (2021). Tipos de conocimientos desplegados por futuros profesores de Matemática al resolver problemas sobre funciones trigonométricas. *Bolema*, 35(71), 1478-1505. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v-35n71a12>

Valencia, J. E. (2021). Estrategias didácticas en los procesos de enseñanza de la educación física escolar mediadas por las TIC durante el confinamiento por COVID 19. *Revista Internacional de Pedagogía e Innovación Educativa*, 2(1), 73-100. <https://doi.org/10.51660/ripie.v2i1.69>

Vargas-Murillo, G. (2020). Estrategias educativas y tecnología digital en el proceso enseñanza aprendizaje. *Cuadernos Hospital de Clínicas*, 61(1), 114-129. http://www.scielo.org.bo/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1652-67762020000100010&lng=es&tlng=es.

Villarroel-Solís, J., y Mazo-Barrera, N. (2020). La caja de polinomios y el método tradicional: dos alternativas didácticas para la enseñanza de la multiplicación y la división de polinomios. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (47), 71-92. <https://doi.org/10.17227/ted.num47-11481>

SOBRES LOS AUTORES

Delio Merma Saico

Afiliación institucional: Universidad Nacional San Antonio Abad del Cusco

Correo: delio.merma@unsaac.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5266-2098>

Rolando Oscoco Solorzano

Afiliación institucional: Universidad Nacional de Educacion “Enrique Guzman y Valle”

Correo: rsolorzano@une.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9610-5912>

José Gil Huaman Monroy

Afiliación institucional: Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-5509-1834>

Elias Ccorimanya Soto

Afiliación institucional: Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa

ORCID: <https://orcid.org/0009-0007-6370-2965>

María Elizabeth Pacheco Salas

Afiliación institucional: Universidad César Vallejo

Correo: mepachecop@ucvvirtual.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4574-1393>



VISUALIZACIÓN ESPACIAL Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO MEDIANTE ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS: MODELO VAN HIELE Y GEOGEBRA

www.arcoeditores.com
contato@arcoeditores.com
(55)99723-4952

ARCO
EDITORES ● ● ●