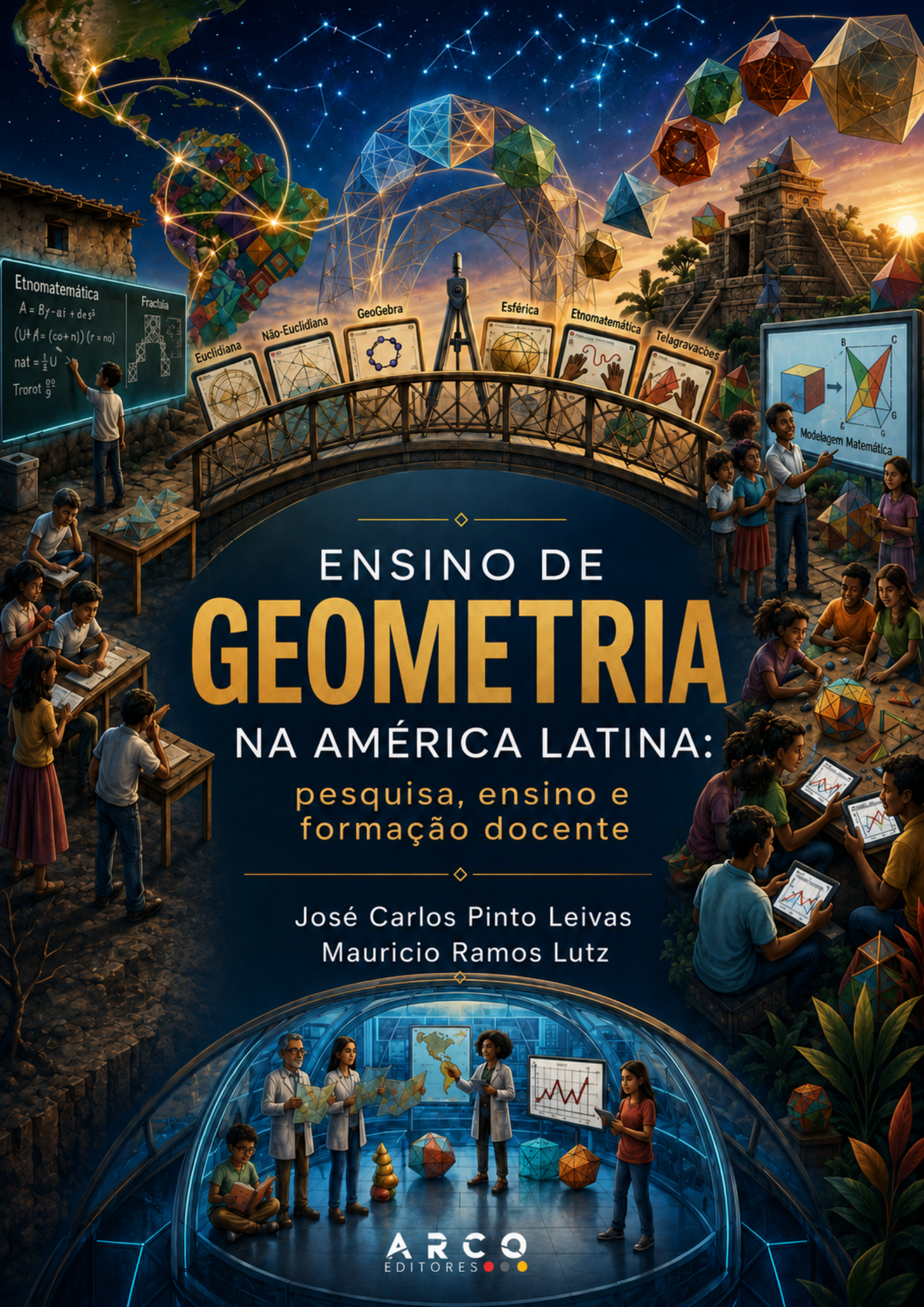




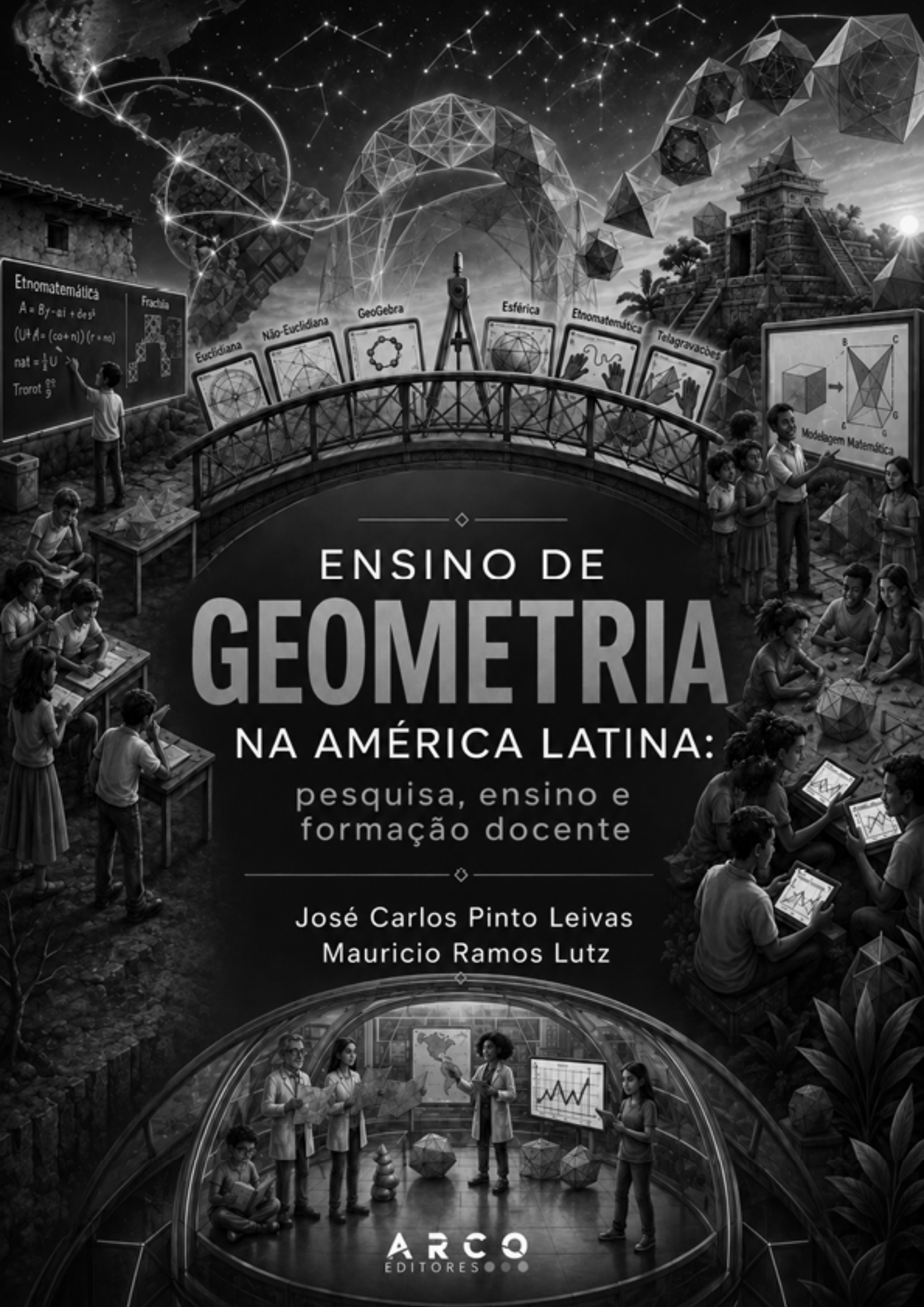
ENSINO DE GEOMETRIA

NA AMÉRICA LATINA:

pesquisa, ensino e
formação docente

José Carlos Pinto Leivas
Mauricio Ramos Lutz

ARCO
EDITORES



ENSINO DE GEOMETRIA

NA AMÉRICA LATINA:

pesquisa, ensino e
formação docente

José Carlos Pinto Leivas
Mauricio Ramos Lutz

ARCO
EDITORES

CONSELHO EDITORIAL

Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva - UNIDAVI
Prof. Dr. Astor João Schönell Júnior - IFFAR
Prof. Dr. Alan Ricardo Costa - UFRR
Prof. Dr. Allan Diêgo Rodrigues Figueiredo - UESPI
Profa. Dra. Andréia Bulaty - UNESPAR
Profa. Dra. Carla da Conceição de Lima - UFVJM
Prof. Dr. Camilo Darsie de Souza - UNISC
Profa. Dra. Clarice Caldeira Leite - UFRGS
Profa. Dra. Cecilia Decarli - UFRGS
Prof. Dr. Carlos Adriano Martins - UNICID
Prof. Dr. Christian Dennys Monteiro de Oliveira - UFCE
Profa. Dra. Dayse Marinho Martins - UFMA
Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos - UEL
Prof. Dr. Dioni Paulo Pastorio - UFRGS
Prof. Dr. Douglas Manoel Antonio de Abreu Pestana dos Santos - FASESP
Profa. Dra. Elane da Silva Barbosa - UERN
Profa. Dra. Elen Gomes Pereira - IFBA
Profa. Dra. Francielle Benini Agne Tybusch - UFN
Prof. Dr. Francisco Odécio Sales - IFCE
Prof. Dr. Francisco Ricardo Miranda Pinto - UFCAT
Prof. Dr. Gilvan Charles Cerqueira de Araújo - UCB
Prof. Dr. Ismar Inácio dos Santos Filho - UFAL
Prof. Dr. Leonardo Bigolin Jantsch - UFSM
Profa. Dra. Liziany Müller Medeiros - UFSM
Profa. Lucianne Oliveira Monteiro Andrade - IFGOIANO
Profa. Dra. Marcela Mary José da Silva - UFRB
Prof. Dr. Mateus Henrique Köhler - UFSM
Prof. Dr. Michel Canuto de Sena - UFMS
Profa. Dra. Mônica Aparecida Bortolotti - UNICENTRO
Prof. Nilton David Vilchez Galarza - UPLA
Prof. Dr. Olavo Barreto de Souza - UEPB
Prof. Dr. Rafael Nogueira Furtado - UFABC
Prof. Dr. Roberto Araújo da Silva Vasques Rabelo - UNISANTOS
Prof. Dr. Rodrigo Toledo - USCS
Prof. Dr. Rodolfo Rodrigues de Souza - UERJ
Prof. Dr. Sidnei Renato Silveira - UFSM
Prof. Dr. Thiago Ribeiro Rafagnin - UFOB
Prof. Dr. Tomás Raúl Gómez Hernández - UCLV

Editor Chefe: Ivanio Folmer

Projeto gráfico e Diagramação: Gabriel Eldereti Machado

Imagem capa: www.canva.com

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Ensino de Geometria na América Latina[livro eletrônico]:
pesquisa, ensino e formação docente / [organização]
José Carlos Pinto Leivas, Mauricio Ramos Lutz. -- 1.
ed. -- Santa Maria, RS : Arco Editores, 2026.
PDF

Vários autores.

Bibliografia

ISBN 978-65-5417-793-1

1. Ensino de Geometria. 2. Educação Matemática.
3. Formação de Professores. 4. Práticas Pedagógicas.
5. América Latina. I. Leivas, José Carlos Pinto.
- II. Lutz, Mauricio Ramos.

CDD-516.007

Índices para catálogo sistemático:

CDD 516.007 — Geometria – Estudo e ensino



10.48209/978-65-5417-793-1

Esta obra foi construída de forma coletiva, reunindo diferentes vozes, experiências e perspectivas. As opiniões expressas nos capítulos são de responsabilidade exclusiva de seus respectivos autores e não representam, necessariamente, a posição desta editora. Esta obra é de acesso aberto. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



APRESENTAÇÃO

O ensino de Geometria ocupa um lugar peculiar na história da Educação Matemática. Por um lado, trata-se de uma área que acompanha o desenvolvimento do pensamento humano desde as primeiras tentativas de organizar o espaço e as formas; por outro, constitui um dos campos mais negligenciados nos currículos escolares da América Latina, frequentemente reduzido a definições memorizadas, fórmulas aplicadas mecanicamente e figuras descontextualizadas. Quem já esteve em uma sala de aula de Matemática sabe bem essa tensão: a Geometria parece ao mesmo tempo indispensável e inacessível, próxima da experiência cotidiana e distante da linguagem escolar. Foi pensando nessa contradição que este e-book foi organizado.

O e-book *Ensino de Geometria na América Latina: pesquisa, ensino e formação docente* nasce do encontro de pesquisadores que, em diferentes países e instituições, têm dedicado suas trajetórias acadêmicas a compreender e transformar essa realidade. Não se trata de um manual de boas práticas nem de uma coletânea de receitas pedagógicas. O que se propõe aqui é algo mais modesto e, ao mesmo tempo, mais ambicioso: documentar caminhos percorridos, problemas enfrentados, teorias mobilizadas e, sobretudo, aprendizagens construídas ao longo de décadas de investigação e de intervenção em salas de aula e em cursos de formação de professores.

A relevância desta obra torna-se evidente quando se olha para o cenário educacional contemporâneo. Em praticamente todos os países da região, a Geometria figura entre os conteúdos de menor desempenho em avaliações nacionais e internacionais. Os professores, em sua maioria, não receberam na formação inicial uma preparação adequada para ensinar essa área, muitos concluem a licenciatura sem ter estudado Geometria Euclidiana com a profundidade necessária, sem conhecer geometrias não euclidianas, sem experimentar laboratórios de manipulação de materiais concretos, sem refletir sobre como os estudantes constroem significados espaciais. O resultado é um ensino que, na melhor das hipóteses, transmite

informações; na pior, reproduz desinteresse e dificuldades que se acumulam ao longo dos anos escolares.

Ao mesmo tempo, a pesquisa em Educação Matemática tem avançado consideravelmente na compreensão desses processos. Sabemos hoje, com respaldo teórico e empírico, que a aprendizagem geométrica envolve visualização, manipulação, argumentação, representação em múltiplos registros e transição gradual do pensamento intuitivo ao formal. Há evidências de que tecnologias digitais como o GeoGebra podem transformar a experiência dos estudantes com objetos geométricos, desde que integradas a tarefas cuidadosamente planejadas. Já compreendemos que a formação de professores exige mais do que disciplinas de conteúdo: exige espaços de reflexão sobre a prática, de análise de produções estudantis, de experimentação com recursos didáticos. O que falta, em muitos casos, é justamente a ponte entre esse conhecimento produzido na academia e as condições concretas de trabalho docente.

Este e-book busca construir essa ponte. Seus sete capítulos foram escritos por pesquisadores que, de alguma forma, têm essa ponte como horizonte de sua atuação. A partir do sul do Brasil, José Carlos Pinto Leivas organiza um panorama de mais de uma década de orientações em mestrado, doutorado e pós-doutorado, mostrando como a diversificação das geometrias ensinadas, da Euclidiana à Esférica, da Hiperbólica à Fractal, pode expandir o repertório conceitual dos professores e, consequentemente, enriquecer suas aulas. Já no sudeste, Ana Maria Martensen Roland Kaleff narra quase cinquenta anos de história da formação de professores na Universidade Federal Fluminense, desde os embates do Movimento da Matemática Moderna até a criação de um laboratório de ensino que se tornou referência em recursos didáticos inclusivos.

Ainda no Brasil, Alexandre Rodrigues de Assis e Marcelo Almeida Bairral apresentam uma proposta metodológica inovadora, as telagravações, que permite olhar com precisão para os gestos, toques e rastros de estudantes em tablets, revelando processos de significação que escapariam a outras formas de registro. Carlos Silva Córdova leva o leitor ao Chi-

le, ele analisa as reformas curriculares recentes e a persistente distância entre o que o currículo prescreve e o que acontece de fato nas salas de aula, apontando para a necessidade de alinhar avaliação, formação e prática.

Da Colômbia, Diana Carolina Pérez Duarte e Luis Fernando Pérez Duarte propõem um modelo teórico-prático para a construção do conhecimento geométrico, fundamentado em anos de pesquisa com estudantes dos três níveis educacionais e orientado pela articulação entre visualização, construção e demonstração. Avançando para a Costa Rica, Luis Fabián Gutiérrez-Fallas examina em detalhe uma experiência de prática profissional de futuros professores, mostrando como uma tarefa exploratória sobre homotetia, mediada por um projetor caseiro, pode gerar aprendizagens significativas tanto para os estudantes do ensino básico quanto para quem está aprendendo a ensinar.

Finalmente, expandindo as fronteiras da nossa investigação até o Peru, Daysi García-Cuellar e Mihály Martínez-Miraval apresentam um mapeamento detalhado do panorama de pesquisas sobre o ensino da Geometria naquele país, concentrando-se nas produções vinculadas ao Mestrado em Ensino da Matemática e ao IREM-PUCP entre os anos de 2019 e 2026. Por meio de uma análise estruturada em cinco eixos teóricos centrais: representações semióticas, Espaço de Trabalho Matemático, conhecimento profissional do professor, tecnologias digitais e perspectivas emergentes. Trata-se, em certa medida, de um mapa de navegação para quem deseja compreender como a pesquisa peruana tem articulado teoria, formação docente e inovação tecnológica no campo da geometria.

A organização dos capítulos respeita a diversidade de abordagens sem impor uma unidade artificial. Cada autor traz uma natureza distinta: Kaleff oferece uma narrativa histórica; Leivas, uma revisão sistemática de produções acadêmicas; Assis e Bairral, uma proposta metodológica; Córdova, uma análise curricular e política educacional; Duarte e Duarte, uma modelagem teórica; Gutiérrez-Fallas, uma análise de prática profissional; e García-Cuellar e Martínez-Miraval, um mapeamento epistemológico

e documental multieixo. Essa diversidade é intencional: o ensino da Geometria é um fenômeno complexo que exige múltiplas lentes, e a obra não pretende reduzi-lo a uma única perspectiva teórica ou metodológica.

O que une os capítulos, contudo, é uma preocupação comum: a formação do professor que ensina Geometria. Seja analisando currículos, propondo tarefas, inventando instrumentos de pesquisa ou documentando trajetórias institucionais ou mapeando a consolidação de eixos científicos nacionais, todos os autores partem do pressuposto de que transformar o ensino da Geometria passa, necessariamente, por transformar quem o ensina. Não se trata de culpar o professor pelas dificuldades do sistema, muito pelo contrário. Trata-se de reconhecer que os professores são, na maioria das vezes, produtos das mesmas formações que reproduzem as limitações que criticamos, e que qualquer proposta de mudança deve incluí-los como sujeitos ativos, não como meros executores de inovações concebidas longe da escola.

O público a quem se dirige esta obra é, portanto, amplo e heterogêneo. Pesquisadores em Educação Matemática encontrarão aqui discussões teóricas fundamentadas, análises de dados empíricos e reflexões metodológicas que podem inspirar novas investigações. Professores de Matemática em exercício, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, poderão apropriar-se das sequências didáticas, das reflexões sobre gestão de aula e das análises de produções estudantis. Estudantes de licenciatura e de pós-graduação terão acesso a um material que articula teoria, pesquisa e prática de maneira integrada, algo que ainda é raro nos cursos de formação de professores. Coordenadores pedagógicos, gestores escolares e formuladores de políticas educacionais poderão utilizar as análises curriculares e as propostas de formação para repensar projetos institucionais e sistemas de avaliação.

Uma palavra final sobre o que este e-book não pretende ser. Seria pretensioso, com sete capítulos, aspirar a uma história completa do ensino da Geometria na América Latina, a diversidade de experiências, tradições e contextos da região exige muito mais. Também não se trata de um relatório

de pesquisa com metodologia uniforme: cada autor seguiu os caminhos que sua trajetória e seus questionamentos lhe indicaram. Muito menos um manifesto por uma única abordagem. Há aqui espaço para o formalismo euclidiano e para a geometria do táxi, para a tecnologia digital (do GeoGebra à inteligência artificial generativa), para o material artesanal e os tecidos ancestrais da etnomatemática, para a análise curricular e para a narrativa autobiográfica.

O que se oferece, em vez disso, é um convite para que o leitor percorra esses textos com atenção, compare suas próprias experiências com as narradas aqui e questione as conclusões. A partir disso, espera-se que você se aproprie das ideias que lhe forem úteis e, sobretudo, continue a construir, em sua prática e em sua pesquisa, um ensino de Geometria mais significativo, mais inclusivo e mais próximo da experiência humana de pensar espacialmente.

Que este livro contribua para que a Geometria deixe de ser, nas palavras de um dos autores, um “anexo” do currículo de Matemática, para se tornar o que ela sempre foi: uma das portas mais antigas e mais poderosas para o pensamento matemático. O convite que faço a você, leitor, é simples: entre por essa porta. Cada capítulo que se segue guarda a experiência de quem caminhou antes, pesquisadores que testaram ideias, erraram, recomeçaram e, aos poucos, foram descobrindo formas de aproximar a Geometria dos estudantes. Não espere receitas fechadas. Espere, isso sim, companhia para pensar. Alguém que já passou por dilemas parecidos aos seus e deixou registrado o que aprendeu. Leia como quem conversa com um colega experiente: com atenção, com desconfiança saudável quando necessário, e com a disposição de levar para sua prática o que fizer sentido. A Geometria espera há muito tempo por professores e pesquisadores que a levem a sério. Talvez você seja um deles.

Mauricio Ramos Lutz

Sumário

11

Capítulo 1

Ensino de Geometria no sul do Brasil: meu papel na formação de professores que ensinam Matemática

José Carlos Pinto Leivas

37

Capítulo 2

Lógica matemática, legislação, litígio, ludicidade e laboratórios na formação do professor que ensina Geometria

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

73

Capítulo 3

Rastros que revelam pensamentos: telagrafações e significação em ambientes de geometria dinâmica

Alexandre Rodrigues de Assis; Marcelo Almeida Bairral

100

Capítulo 4

O ensino da Geometria no Chile: entre a pesquisa e as mudanças curriculares

Carlos Silva Córdova

136

Capítulo 5

O ensino da Geometria na América Latina: desenvolvimento do pensamento geométrico, evidências empíricas e desafios contemporâneos

Diana Carolina Pérez Duarte; Luis Fernando Pérez Duarte

153

Capítulo 6

O ensino exploratório da homotetia: uma experiência de prática profissional de futuros professores de matemática

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas

182

Capítulo 7

O ensino da Geometria no Peru: tendências, desafios e perspectivas

Daysi García-Cuéllar; Mihály Martínez-Miraval

212

Sobre os Organizadores

213

Sobre as Autoras e os Autores

CAPÍTULO I

Ensino de Geometria no sul do Brasil: meu papel na formação de professores que ensinam Matemática

José Carlos Pinto Leivas

Resumo: O capítulo aborda uma análise de dissertações, teses e trabalhos de pós-doutorado, orientadas pelo autor, na qual é ilustrada a temática Geometria, em suas diversas especificidades. Os temas concentram-se, principalmente, na Geometria Euclidiana, nas duas Não-Euclidianas clássicas (Esférica e Hiperbólica) e em outras não euclidianas como Geometria Fractal, Geometria Sintética e Geometria do Táxi. Analisamos rapidamente o objetivo de cada uma, os elementos envolvidos na pesquisa e os resultados alcançados. Acreditamos que o apanhado realizado dá uma percepção do papel do orientador destes trabalhos, incluindo três orientações em pós-doutorado. Acreditamos ser esta descrição relevante na disseminação do ensino de Geometria de uma forma abrangente, atual e que evolui como a própria Geometria, a fim de desenvolver o pensamento geométrico.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Geometrias Não-Euclidianas. Geometrias não euclidianas.

Resumen: El capítulo aborda un análisis de disertaciones, tesis y trabajos de posdoctorado, dirigidos por el autor, en los que se ilustra la temática de la Geometría en sus diversas vertientes. Los temas se centran, principalmente, en la Geometría Euclidiana, en las dos geometrías No-Euclidianas clásicas (Esférica y Hiperbólica) y en otras geometrías no euclidianas, como la Geometría Fractal, la Geometría Sintética y la Geometría del Taxi. Analizamos brevemente el objetivo de cada una de ellas, los elementos que intervienen en la investigación y los resultados obtenidos. Creemos que este resumen ofrece una visión del papel del director de estos trabajos, incluidas tres direcciones de posdoctorado. Consideramos que esta descripción es relevante para la difusión de la enseñanza de la Geometría de una forma integral, actual y que evoluciona al igual que la propia Geometría, con el fin de desarrollar el pensamiento geométrico.

Palabras-clave: Enseñanza de la Geometría. Geometrías No-Euclidianas. Geometrías no euclidianas.

INTRODUÇÃO

A Geometria tem sido uma área da Matemática que se desenvolveu ao longo do tempo, em especial com a organização grega em “Os Elementos de Euclides”. Em alguns momentos, ela parece esmaecer um pouco, porém retorna com inovações relevantes para a sociedade e, particularmente, para o ensino. Uma das primeiras inovações foi a criação das duas geometrias não euclidianas: Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica, que ainda hoje são desconhecidas por grande número de professores de Matemática.

Na Geometria Esférica, o modelo é materializado sobre a superfície de uma esfera e tornou-se muito útil, por exemplo, para a navegação marítima, uma vez que os trajetos mínimos a serem percorridos ocorrem nas denominadas geodésicas (as linhas retas imaginárias que ligam o polo Norte ao polo Sul desta superfície, denominadas meridianos). Para além disso, a Geografia a utiliza em um sistema de coordenadas dadas por ângulos que outros meridianos formam com o meridiano origem, ou seja, o Meridiano de Greenwich, o qual corresponde à longitude de 0° . A partir disso, uma geometria é desenvolvida a exemplo do que ocorreu com a Euclidiana.

A Geometria Hiperbólica surge concomitantemente com dois modelos distintos: o primeiro é o de Poincaré, em que o espaço geométrico é dado por um disco sem a sua fronteira, com retas sendo visualizadas pelos diâmetros e/ou arcos de circunferências que entram na fronteira do círculo ortogonalmente; o segundo é denominado de Modelo de Klein, com certa similaridade ao anterior, um disco sem sua fronteira, porém tendo por retas as cordas do interior do disco. Ambos são espaços em duas dimensões.

A Geometria Sintética, também chamada de Geometria Pura, apresenta outra abordagem diferente das anteriores, menos visual, a qual é caracterizada por outros modos sintéticos de abordar as formas, os lugares geométricos e as construções, ou seja, apresenta um embasamento axiomático previamente existente.

Uma das geometrias mais recentes é a denominada Geometria do Táxi, também reconhecida como dos catetos, uma vez que os percursos ou linhas nela definidas não são mais oriundos da métrica euclidiana, ou seja, a ligação de dois pontos em um sistema cartesiano é dada pela soma das medidas dos catetos de um triângulo retângulo formado. Ligeiramente, esta forma de linhas se assemelha ao percurso realizado por um táxi em uma cidade organizada em quadras, como por exemplo, a cidade de Brasília.

Nossos estudos têm mostrado que estas geometrias são muito pouco exploradas, tanto na formação inicial de professores de Matemática quanto na continuada, o que inibe o desenvolvimento do pensamento geométrico de um futuro pesquisador/professor. Temos buscado desenvolver pesquisas em nossa atuação como professor em um mestrado e um doutorado no ensino de Ciências e Matemática, visando expandir o ensino de Geometria para outros patamares além da Geometria Euclidiana, ampliando assim o conhecimento geométrico dos indivíduos no sul do Brasil.

Mlodinow (2010), ao abordar a história da Geometria e sua genialidade para vislumbrarmos novos horizontes, levanta os questionamentos: [...] “o espaço pode ser curvo? Quantas dimensões existem? Como a Geometria explica a ordem e a unidade do Cosmos?” (p. 10). Afirma, ainda, “Essas são as perguntas que estão por trás das cinco revoluções geométricas da história mundial.” O autor traz a revolução feita por Descartes a fim de economizar trabalho mental ao estabelecer casamento da Geometria com os números e assim esses passaram a poder ser visualizados geometricamente. Uma dessas mudanças relevantes preconizadas por Descartes está na famosa e revolucionária relação euclidiana da soma dos ângulos internos de um triângulo. “Será realmente a soma dos ângulos de todos os triângulos igual a 180 graus, ou isso somente é verdade se o triângulo estiver sobre uma folha de papel plana?” (idem, p. 10).

É sabido hoje que na Geometria Esférica esta soma varia de 180 a 540 graus e na Hiperbólica é menor do que 180 graus. Ainda perdura entre

estudantes e professores que a soma é igual a 180 sem especificar em qual Geometria esta relação é válida. Esta é uma das razões importantes de abordagens de diversas geometrias na formação dos indivíduos, especialmente na formação de professores que irão ensinar Geometria.

Assim, o objetivo deste capítulo é ilustrar algumas das produções de estudantes que passaram por minhas orientações nos últimos tempos. Pesquisas mostram que a Geometria é uma das subáreas da Matemática que tem enfrentado muitas dificuldades, tanto no seu ensino quanto na sua aprendizagem no Brasil. Ultimamente, com o uso das tecnologias, em particular com o *software* GeoGebra, que pode ser baixado gratuitamente, parece que tem apresentado algumas possibilidades de despertar nos estudantes dos diversos níveis de ensino um pouco mais de inovações, possibilidades e interesse.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) apresenta orientações curriculares, mas pouco se observa avançar na direção da Geometria. Por exemplo, em livros didáticos distribuídos pelo Governo Federal brasileiro para as escolas públicas, de forma gratuita, ainda perduram muitos desalinhamentos em alguns destes livros. Em um exemplar encontrado, aparece a definição de polígono, de forma incorreta, como “**Polígono** é uma figura plana formada por uma linha fechada simples, composta apenas de segmentos de reta, reunida com a sua região interna.” (Junior e Castrucci, 2018, p. 168, grifo dos autores).

Os autores exemplificam com representações figurais, pintando tanto a linha poligonal quanto a região limitada por ela. Note, ainda, que esta é a definição de região poligonal e não de polígono, constituído somente pela linha formada pelos segmentos de reta. De acordo com Duval (2003), a aprendizagem de um conceito ocorre quando há pelo menos a conversão entre dois registros de representação, no presente caso, o figural (a imagem do objeto) e o em língua natural (a definição). Na exemplificação, tem-se a definição de linha poligonal e a representação de uma região limitada pela linha poligonal, não levando, portanto, à aprendizagem do conceito de polígono, em nosso entender. Ao associar o elemento

geométrico (polígono) da forma como apresentado, qual é a grandeza associada: comprimentos ou área? Essas correspondem a objetos distintos.

No que diz respeito à Educação Infantil, o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (RCNEI), aborda o perfil profissional necessário ao professor, ao qual “[...] cabe trabalhar com conteúdos de naturezas diversas [...]”, necessitando “[...] uma formação bastante ampla do profissional que deve tornar-se, ele também, um aprendiz, refletindo constantemente sobre sua prática.” (Brasil, 1998, p. 41). No que diz respeito aos conteúdos, indica:

Os conteúdos conceituais referem-se à construção ativa das capacidades para operar com símbolos, ideias, imagens e representações que permitem atribuir sentido à realidade. Desde os conceitos mais simples até os mais complexos, a aprendizagem se dá por meio de um processo de constantes idas e vindas, avanços e recuos nos quais as crianças constroem ideias provisórias, ampliam-nas e modificam-nas, aproximando-se gradualmente de conceitualizações cada vez mais precisas. (p. 50).

Assim, faz-se necessária, na formação do professor, atenção aos diversos níveis de ensino a fim de não atentar somente para um nível mais elevado, como é usual acontecer na formação inicial do professor de Matemática, sendo, portanto, a formação continuada que atenda a esta limitação da formação inicial que, geralmente, vai na direção da área de Análise (forte conotação em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e até mesmo Equações Diferenciais). Esta área, geralmente, não conduz a abordagens que o futuro professor irá encontrar no Ensino Básico.

Quanto ao desenvolvimento de pensamento geométrico, o documento indica trabalhá-lo como habilidade para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, recomenda a formalização e a resolução de problemas em contextos diversos. Assim, para ocorrer esta habilidade, é necessário que a formação de professores de Matemática se atualize e atente para as inovações que se fazem necessárias. Uma dessas possibilidades é desenvolver princípios de uma geometria não euclídea-

na, a saber, a Geometria do Táxi. Esta Geometria foi tema de uma dissertação de mestrado por mim orientada e que será posteriormente explicitada. Outras geometrias também são importantes para este desenvolvimento. Segundo Gomes, Bianchini e Lima (2023, p. 21), o pensamento matemático:

[...] pode ser entendido como o resultado de processos racionais do intelecto ou de abstrações da imaginação realizados a partir da observação e reflexão científica de fenômenos de diferentes naturezas por meio da sistematização e contextualização de conhecimentos matemáticos, da capacidade de perceber visual e espacialmente, de representar, memorizar, pensar de maneira criativa, objetiva, lógica, analítica e crítica.

No presente capítulo, atentaremos para o trabalho que temos realizado no Brasil, particularmente no sul, a respeito da Geometria nos cursos de Mestrado e Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática em que trabalhamos a fim de desenvolver pensamento visual geométrico. Entendemos pensamento geométrico como um processo que permite ao indivíduo elaborar estruturas geométricas mentais a partir da imaginação, da intuição e da visualização para produzir conhecimentos matemáticos científicos. Assim sendo, orientar dissertações e teses me parece ser fundamental para o desenvolvimento deste tipo de pensamento que tem sido disseminado pelos orientandos em suas práticas, como pode ser constatado em pesquisas e eventos em que participam.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Trazemos aqui algumas considerações sobre a formação de professores que ensinam Matemática/Geometria por acreditarmos que muitos dos problemas no ensino dizem respeito a uma formação inadequada aos objetivos dos cursos, quer de formação inicial quer na continuada. Além disso, por vezes dizem respeito a certa inadequação aos objetivos de formar professores para os diversos níveis.

Para Cyrino *et al.* (2025), “o aprender a perceber envolve um trabalho complexo, principalmente quando se pretende desenvolver formas de perceber caracterização de uma de uma ‘pedagogia ambiciosa’ que valorize a comunicação e a colaboração entre os alunos.” (p. 8)

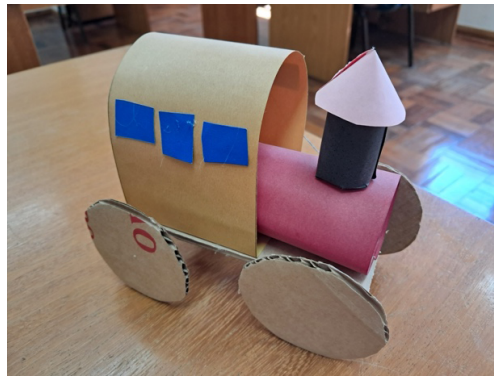
O dito pelos autores vai direto ao nosso pensamento sobre a especificidade, ou melhor, ao objetivo do curso no qual se está preparando o indivíduo para o exercício profissional. Em algumas situações, o curso de Licenciatura em Matemática ainda apresenta um caráter de bacharelado, onde se faz Matemática pela Matemática, o que temos nos contraposto com a Educação Matemática, na atualidade.

Problemas relativos ao ensino e à aprendizagem em Geometria são abordados por Almouloud, Manrique, Silva, Campos (2004), que investigam problemas relacionados ao ensino e à aprendizagem de Geometria, os quais são enfrentados pelos professores que ensinam no segundo segmento do Ensino Fundamental. Para os autores, as ações escolhidas para a pesquisa centraram-se no quadro teórico dos registros de representação semiótica, na teoria das situações, nos princípios da pesquisa-ação e da engenharia didática. Os investigados deveriam descrever suas práticas. Ao anualizarem os resultados, os pesquisadores constataram que, ao realizarem provas e demonstrações em Geometria, muitas dificuldades foram observadas, sendo que foram indicados os seguintes pontos:

Quais fatores influenciam no processo de ensino e aprendizagem da demonstração? Quais ações desenvolver com os professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas, envolvendo provas e demonstrações? Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada dos professores no que diz respeito às provas e demonstrações em matemática, em especial em geometria? (p. 18).

Em uma busca a tais respostas, nos encaixamos em nossas orientações ao abordar a Geometria nos diversos patamares, como explorar os recursos materiais existentes ou construídos pelos participantes, como um geoplano, os *softwares* de Geometria Dinâmica e outros, como o que consta da Figura 1, no desenvolvimento de uma atividade apoiada em Van Hiele por uma mestrandia envolvida em um mestrado profissional envolvendo professores pedagogos.

Figura 1 – Trenzinho construído por uma aluna de mestrado



Fonte: mestranda A.

Pode-se observar a diversidade de formas geométricas e o envolvimento de propriedades como a de círculo e de circunferência na formação das rodas, características das figuras que rolam. Além disso, as formas cônicas e cilíndricas, dentre outras.

No ano de 2010, atuamos na formação inicial de professores (de Pedagogia e de Matemática). A partir de 2011, passamos a atuar em um Mestrado Profissional que, posteriormente, ampliou-se para Acadêmico e, na sequência, em Doutorado. Nesta instituição e cursos, temos o privilégio de atuar com Geometria em suas várias faces: plana, espacial, analítica etc.

Neste capítulo traremos alguns ensinamentos que realizamos em mestrado e em doutorado a respeito de avançar na compreensão de conceitos de outras geometrias para além da Euclidiana, de modo que o professor tenha condições de abordá-los de modo à que um pedagogo ou professor de Matemática possa levar algumas ideias de outras geometrias explorando diversos recursos, como o indicado na figura anterior.

DESENVOLVIMENTO

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC é um documento orientador do ensino e estabelece que “A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento” (Brasil, 2018, p. 271). Cabe ao formador de professores desenvolver tais conceitos e procedimentos envol-

vidos nas diversas geometrias existentes. Se isso não se concretiza na Licenciatura em Matemática, então cabe a busca pela formação continuada desses professores. Ao indicar o objeto do conhecimento “localização de objetos e de pessoas no espaço, utilizando diversos pontos de referência e vocabulário apropriado” (p. 278). Já no Ensino Fundamental, faz-se necessário levar em conta, por exemplo, a Geometria do Táxi e a Esférica, como indicado no item anterior, o que, geralmente, não ocorre pelo desconhecimento dos professores e limita-se apenas ao sistema cartesiano. Isso é reiterado no documento em relação às habilidades para a Geometria nos diversos anos de escolaridade.

O grande Félix Klein, em seu clássico livro *Matemática Elemental* desde um ponto de vista superior, ao introduzir o volume II – Geometria, indica:

As linhas gerais do nosso plano são traçadas levando em conta, em primeiro lugar, o que poderíamos chamar de atualidade enciclopédica, que nos obriga a fornecer-lhe uma visão geral de toda a Geometria, na qual você encontrará todos os conhecimentos isolados que adquiriu ao longo dos seus estudos, ordenados, classificados e prontos para qualquer aplicação que lhes seja dada. (Klein, 1927, p. 1, trad. do autor).

Nessa direção é que o capítulo se ampara a fim de cumprir o objetivo de trazer pesquisas realizadas por orientandos recentes, ao nível de mestrado, doutorado e pós-doutorado, visando retomar os conhecimentos geométricos dos mesmos na expectativa de divulgar trabalhos que visam a ampliação dos conhecimentos de diversas geometrias.

TRABALHOS ORIENTADOS A PARTIR DE 2013

Trabalhos de mestrado

Inicialmente, apresentamos no Quadro 1 trabalhos orientados ao nível de mestrado com as respectivas temáticas e, na sequência, no Quadro 2 adiante, as teses e no Quadro 3, os trabalhos de pós-doutorado.

Quadro 1 – Dissertações de mestrado¹

Ano	Título da dissertação
2013	O <i>SOFTWARE</i> CABRI 3D COMO FERRAMENTA DE AUXÍLIO AO ENSINO E VISUALIZAÇÃO DE SEÇÕES PLANAS NO CUBO PARA ALUNOS DO ENSINO MÉDIO
2013	O ENSINO DA GEOMETRIA PARA ALUNOS COM DEFICIÊNCIA VISUAL
2013	INTUIÇÃO E PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS PARA UM GRUPO DE PROFESSORES, MESTRANDOS DE UM MESTRADO PROFISSIONALIZANTE EM ENSINO DE FÍSICA E DE MATEMÁTICA
2015	REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E GEOMETRIA DINÂMICA PARA O ENSINO DE CONGRUÊNCIAS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS
2015	A GEOMETRIA DO TÁXI: INVESTIGAÇÃO SOBRE O ENSINO DE UMA GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA PARA O TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO
2016	TECNOLOGIAS COMPUTACIONAIS COMO FERRAMENTAS PARA INSERIR CONHECIMENTOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA NO ENSINO FUNDAMENTAL
2016	GEOMETRIA SINTÉTICA: INVESTIGAÇÃO SOBRE O USO DE UM <i>SOFTWARE</i> DE GEOMETRIA DINÂMICA COMO MEIO PARA DEMONSTRAÇÕES VISUAIS
2017	SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS A PARTIR DA GEOMETRIA FRACTAL PARA LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA
2017	O GEOGEBRA 3D NA CONSTRUÇÃO DA PIRÂMIDE A PARTIR DE SEU TRONCO: REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA
2018	SÓLIDOS E SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO COM AUXÍLIO DO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA
2019	CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO NO ENSINO DE GEOMETRIA ELEMENTAR: CONTRIBUIÇÕES DE UM ESPAÇO FORMATIVO
2020	CONTRIBUIÇÕES DA COMPREENSÃO RELACIONAL E DA INSTRUMENTAL EM ATIVIDADES ENVOLVENDO GRANDEZAS E MEDIDAS NO ENSINO FUNDAMENTAL
2025	GEOMETRIA FRACTAL NA COMPREENSÃO E EXPLORAÇÃO DE PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS: UMA POSSIBILIDADE DE ANÁLISE, DE PADRÕES E DE ESTRUTURAS MATEMÁTICAS

Fonte: autoria própria.

¹ Os títulos estão com link que permite acessar os trabalhos completos.

Podemos observar as três primeiras dissertações, realizadas no mesmo período e concluídas em 2013, com certa diversificação da Geometria envolvida. A primeira, de autoria de Guilherme Bagggio Marin, foi realizada por um professor de Matemática atuante tanto no Ensino Médio quanto no Superior. Ele investigou as contribuições do *software* presente à época, Cabri Géomètre 3D, com 29 alunos do 3º ano do Ensino Médio. A pesquisa comprovou as vantagens do uso do *software* na visualização das seções planas obtidas em um cubo por planos que interceptam suas arestas, sendo elaborado um tutorial disponibilizado ao público em geral. Aqui já se mostra a importância do uso de um recurso tecnológico no ensino e na pesquisa.

A segunda dissertação, de autoria de Davi Cezar da Silva, abordou o ensino da Geometria para alunos com deficiência visual. Foram investigadas as dificuldades dos pesquisados com relação aos materiais de baixo custo disponíveis e adequados, bem como a construção de outros recursos. A pesquisa concluiu que os materiais desenvolvidos pelo pesquisador evidenciaram o preenchimento de algumas lacunas que ainda perduram em relação aos conteúdos de Geometria para esta clientela. Foi gravado um vídeo disponibilizado no site da Universidade Franciscana.

Como já citado antes, a Topologia é uma parte da Geometria muito pouco explorada no currículo da Licenciatura em Matemática. A terceira dissertação, de autoria de Erilúcia Souza da Silva, intitulada Intuição e propriedades topológicas com um grupo de professores, mestrandos de um mestrado profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática. Explorou habilidades intuitivas em uma oficina com esses mestrandos envolvendo propriedades topológicas básicas, como o pintar um mapa com quatro cores e outras. Os participantes, todos também professores no Ensino Básico, manifestaram grande interesse por uma outra abordagem da Geometria, a qual desconheciam.

Em 2015, foram duas dissertações concluídas. Letícia dos Santos Fogaça utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica juntamente com Geometria Dinâmica para o ensino de congruência de figuras

geométricas planas, investigando alunos de uma Licenciatura em Matemática. A autora elaborou quatro unidades didáticas que conduziram à construção do conceito de congruência de figuras planas e dos casos clássicos de congruência de triângulos por meio de diferentes registros de representação, tais como: registro figural, mental, computacional, discursivo e algébrico. Percebemos aqui a importância de tal abordagem para evitar o citado anteriormente sobre o encontrado em livro didático.

Neste último ano, a dissertação de Helenara Machado abordou a Geometria do Táxi em uma pesquisa realizada com alunas de um curso de Ensino Médio voltado à formação de professores dos Anos Iniciais. Foram aplicadas atividades diversas como deslocamentos em cidades urbanizadas, utilizando protótipos elaborados em malha quadriculada, o que permitiu às participantes compreenderem que a Geometria Euclidiana não era suficiente para a aprendizagem destes conceitos em situação real. Ao observarmos atualmente o RCNEI, verificamos ser esta uma das habilidades necessárias para o ensino de Geometria neste nível, como citado anteriormente.

No ano de 2016, duas novas dissertações foram concluídas, sendo uma das Geometrias Não-Euclidianas (Hiperbólica) se fez presente no trabalho de Hiago Portella de Portella. O mestrando buscou usufruir dos avanços tecnológicos, utilizando equipamentos e programas computacionais, como o GeoGebra, apoiado pelo uso de *tablets* distribuídos aos alunos e computadores da escola (conectados à internet) em um projeto de iniciação científica júnior. O *software* foi utilizado para a retomada de conceitos euclidianos. A pesquisa conclui que os alunos do 7º ano do Ensino Fundamental conseguiram compreender o modelo de Poincaré de uma Geometria Hiperbólica facilitado pelas construções no GeoGebra, bem como o professor, então mestrando, adquirindo novas formas de ensino.

Ainda neste mesmo ano, uma segunda dissertação abordou uma das geometrias não euclidianas, a Geometria Sintética, concluída por Nadia Roberta Quaini Bresolin, a qual também utilizou o GeoGebra, a exemplo da dissertação anterior. Foi constatado na investigação que o *software* au-

xiliou no desenvolvimento de habilidades criativas, intuitivas e visuais em demonstrações, o que significa explorar a Geometria Sintética.

Foi aplicada uma oficina com alunos do 1º ano do Ensino Médio, envolvendo quatro teoremas de Geometria Plana, escolhidos aleatoriamente e viáveis para o nível de ensino. Foi constatado que o desenvolvimento da criatividade, o uso do pensamento intuitivo e a visualização como forma de analisar a exploração de ideias na formulação de conjecturas contribuíram para a construção dos teoremas, propiciando uma aprendizagem significativa. Além disso, indica Geometria Sintética como uma forma de realizar demonstrações lógicas de teoremas, desenvolvendo habilidades de argumentação e justificativas.

Em 2017, novamente duas dissertações foram concluídas, sendo a primeira de Bárbara Regina da Silveira Batista, que abordou mais uma geometria não euclidiana – Geometria Fractal. Foi realizada uma pesquisa com alunos do Ensino Superior e objetivou-se averiguar as contribuições que esta geometria pode oferecer para introduzir o conteúdo de sequências numéricas na Licenciatura em Matemática. Além disso, afirma que ela permite a integração de vários campos da Matemática e de outras ciências e, quando inserida no ensino, pode desenvolver o lado experimental dos alunos e entender Geometria como facilitadora para a apropriação de conceitos de sequências numéricas. Previamente à aplicação com alunos, a investigadora aplicou atividades com colegas professores da mesma instituição com experiências em várias disciplinas como Cálculo etc. Esses desconheciam a temática. Embora todos os alunos participantes já houvessem concluído as disciplinas de Cálculo, registraram a importância deste conteúdo fractal para a efetiva aprendizagem dos conceitos relacionados às sequências.

A segunda dissertação defendida neste ano foi de Anne Desconsi Hasselmann Bettin, e envolveu estudantes do 3º ano do Ensino Médio na abordagem dos Registros de Representação Semiótica a partir de um problema gerador sobre tronco de pirâmide. Foi utilizado o GeoGebra 3D no desenvolvimento da pesquisa, bem como registros em papel. As atividades

foram divididas em três etapas, onde se procurou analisar, na etapa I, os conhecimentos prévios do aluno; na etapa II, os registros e o raciocínio do aluno com o material manipulável e, na etapa III, os registros e o raciocínio do aluno com o uso do *software* GeoGebra 3D. Partiu da compreensão do material concreto para a utilização das tecnologias. Os resultados mostraram que as atividades propostas contribuíram para revisar conceitos básicos de Geometria, para a construção e compreensão de novos conceitos, na visualização do objeto em diferentes formas de representação, estimulando a visualização e a aprendizagem.

Em 2018, Dionatan Oliveira Nadalon defendeu dissertação intitulada Sólidos e Superfícies de Revolução com auxílio do GeoGebra. O uso deste *software* de acesso livre e constante incrementação têm levado os estudantes a optarem por recorrer a ele para investigar atividades que, muitas vezes, eram realizadas no âmbito teórico com alguns recursos materiais. A aplicação foi realizada com um grupo PIBID, sendo inicialmente solicitado que diferenciasssem no próprio GeoGebra polígono de região poligonal bem como superfície de sólido de revolução. A primeira diferenciação já foi objeto de discussão nos pressupostos teóricos do capítulo. A dissertação buscou também realizar adaptações de questões do ENEM ao GeoGebra. Por sua vez, um dos participantes analisados cursava a Licenciatura em Matemática e outro era professor da escola básica. Foi concluído sobre o fato de o *software* ser um meio viável para desenvolver e facilitar a visualização de problemas geométricos envolvendo superfícies e sólidos de revolução. Constatamos aqui a relevância em utilizar recursos atuais para o ensino de Geometria, fugindo ao mero uso de fórmulas e demonstrações.

Em 2019, novamente uma única dissertação é defendida com autoria de Débora da Silva de Lara, que investiga o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo – PCK no ensino de geometria elemental em um espaço formativo. Apoiada nesta teoria, a autora realiza um estudo com um grupo de professores em um mestrado profissional envolvendo aqueles com formação em Pedagogia. Os resultados da análise dos vídeos com os debates e realização de atividades, gravados durante a aplicação da pesquisa, mostram haver a necessidade de atividades como as aplicadas,

durante a formação inicial do pedagogo, envolvendo conteúdos matemáticos voltados para a atuação desses professores.

No ano de 2020, foi defendida a dissertação de Fabielli Vieira de July, que abordou a compreensão relacional e a compreensão instrumental da teoria de Skemp, um dos pioneiros na temática da Psicologia envolvendo a Educação Matemática. Após uma revisão criteriosa sobre pesquisas relativas ao tema Grandezas e Medidas voltadas aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, foi realizada uma atividade com estudantes deste nível de escolaridade e realizada análise relativa aos dois tipos de conhecimentos indicados na realização das tarefas, o que mostrou a importância dada por eles sobre a compreensão de conceitos de modo relacional. Isso possibilitou conexões entre conhecimentos cotidianos e conhecimentos mais formais, por meio das atividades propostas naquele momento.

Com a criação do doutorado na instituição, houve uma redução no mestrado, sendo a última orientada por mim concluída em 2025, escrita por Uilson David de Oliveira e intitulada Geometria Fractal na compreensão e explicação de progressões geométricas: uma possibilidade de análise, de padrões e de estruturas matemáticas. O autor objetiva realizar, aplicar e analisar um estudo de conceitos de Geometria Fractal em Progressão Geométrica direcionado aos Anos Finais da Educação Básica. Foi proposto um Produto Educacional constituído de uma sequência de ensino a ser realizada com professores da rede de ensino de Roraima. A análise prévia na literatura mostrou que há muito pouca produção estabelecendo conexões entre Geometria Fractal e sequências numéricas. Assim, esta geometria não euclidiana pode ser um elemento desencadeador do estudo de sequências em vários níveis de escolarização.

Descrevemos até aqui um total de treze dissertações orientadas na Universidade Franciscana em que atuamos como professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGECIMAT, todas elas na área de Geometria. Os trabalhos avançaram, por exemplo, desde o Cabri ao GeoGebra como tecnologia relevante para o ensino de Matemática.

Por sua vez, constam também investigações que vão desde a Geometria Plana e Espacial até geometrias nem sempre utilizadas na forma-

ção inicial do professor de Matemática, como a Geometria do Táxi (inclusive na formação de professores do Magistério ao nível de Ensino Médio). Perpassam os diversos modelos não euclidianos - Esférica, Hiperbólica, Sintética, do Táxi.

Também podemos constatar as diversas pesquisas envolvendo tanto estudantes em ação continuada em um mestrado quanto professores das redes de ensino e licenciandos em Matemática, além de alunos da Escola Básica.

Passamos, neste momento, a indicar no Quadro 2 os trabalhos orientados ao nível de doutorado com as respectivas temáticas de cada um.

Teses de doutorados

O Quadro 2 contém uma síntese das teses de doutorado orientadas nos respectivos anos.

Quadro 2 – Teses de doutorado orientadas²

Data	Título da tese
2020	INVESTIGAÇÃO DE ASPECTOS DA COMPREENSÃO RELACIONAL E DA INSTRUMENTAL EM GEOMETRIA ESFÉRICA
2020	POSSIBILIDADE DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFFAR
2021	TRANSFORMAÇÕES ADAPTATIVAS EM CONTEÚDOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: UM ESTUDO DE CASO ENVOLVENDO TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA
2023	O GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM GEOMETRIA (GEPGEO) COMO UM ESPAÇO DE APRENDER DOCENTE: CONTRIBUIÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO
2023	MATEMÁTICA E ARTES: ANAMORFISMO NO ENSINO INTERDISCIPLINAR DE GEOMETRIA
2024	ESPAÇO DE TRABALHO GEOMÉTRICO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM EM TÓPICOS DE SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS
2025	APREENSÕES FIGURAIS NO ESTUDO DA GRANDEZA GEOMÉTRICA ÁREA: UMA INVESTIGAÇÃO COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Fonte: autoria própria.

² Os títulos estão com link que permite acessar os trabalhos completos.

As duas primeiras teses, por mim orientadas, foram defendidas no ano de 2020. Com o título INVESTIGAÇÃO DE ASPECTOS DA COMPREENSÃO RELACIONAL E DA INSTRUMENTAL EM GEOMETRIA ESFÉRICA, a mesma teve por autora Jussara Aparecida da Fonseca. A pesquisa realizada pela autora teve por objetivo analisar como alunos de uma licenciatura em Matemática compreendem relações métricas em triângulos esféricos a partir das relações euclidianas. É importante o conhecimento de uma Geometria Não-Euclidiana, no caso a Esférica, para a compreensão da própria Euclidiana. Para fundamentar o estudo, foi utilizada a teoria de Richard Skemp sobre as compreensões relacional e instrumental, como já descrita em uma das dissertações. Foram realizadas tarefas organizadas em atividades exploratórias no plano euclidiano, na superfície esférica e em triângulos esféricos. Aquelas realizadas no plano visavam recordar alguns conceitos da Geometria Euclidiana, de modo a, posteriormente, verificar sua existência sobre a superfície esférica e, por fim, as tarefas envolvendo triângulos esféricos focaram-se na obtenção de algumas de suas relações e propriedades. Com base em critérios apontados nas investigações matemáticas e nos tipos de compreensão, evidenciaram aspectos da compreensão relacional de tópicos da Geometria Esférica, em especial, de relações métricas em triângulos esféricos. Os tópicos trabalhados possibilitaram aos participantes outra visão sobre o desenvolvimento tanto do conhecimento geométrico quanto da própria Matemática, pois a partir deles vislumbraram a existência de outro modelo geométrico, diferente, mas tão consistente quanto o da geometria euclidiana.

Ainda no mesmo ano, Mauricio Ramos Lutz defendeu sua tese doctoral intitulada POSSIBILIDADE DE INSERÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFFAR. O objetivo da pesquisa foi investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha. Um dos fatores que levaram o autor a pesquisar foi a falta de outras geometrias no currículo do curso em que atua, constando somente Geometria Euclidiana e Analítica. Também levou

em conta pesquisa em que poucos são os cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil em que consta esta temática. A pesquisa apoiou-se em Raymond Duval, em que aplicou uma sequência de atividades em forma de oficinas explorando as tecnologias digitais, ou seja, exploratórias com o GeoGebra, reunindo três elementos básicos: uma geometria não euclidiana; uma teoria relevante explorando os vários tipos de registros e um *software* atual. A tese inspira reformulações do curso em questão para alterações curriculares com inclusão de novas geometrias.

Em 2021, foi a vez de Reginaldo Fabiano da Silva Afonso. Defendeu a tese com o título de TRANSFORMAÇÕES ADAPTATIVAS EM CONTEÚDOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA: UM ESTUDO DE CASO ENVOLVENDO TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA. A pesquisa de Reginaldo surgiu a partir de sua prática no Ensino Superior ao verificar o estado do conhecimento encontrado sobre o ensino de Geometria Analítica e a necessidade percebida sobre a Transposição Didática e Situações Didáticas necessárias a serem realizadas no seu ambiente de trabalho. Houve a busca em descrever as organizações matemáticas e as organizações didáticas apresentadas nos livros que compõem a bibliografia básica de um curso de graduação ofertado por uma instituição de ensino superior em relação ao ‘saber ensinar’ cônicas, tendo em vista que essa habilidade pedagógica entra como um elemento estruturante do conhecimento científico. Em seguida, buscou entender como a implementação das fases das Situações Didáticas pode influenciar no processo de aprendizagem do saber a ensinar cônicas por meio de atividades interdisciplinares, investigando egressos do Curso de Engenharia Ambiental e Sanitária. Foi aplicada a pesquisa em alunos do Curso de Engenharia Ambiental e Sanitária da Universidade Federal do Pampa/Campus Caçapava do Sul, regularmente matriculados na instituição, os quais tinham interesse e disponibilidade para participar do programa de monitoria voluntária, na modalidade pesquisa. Os resultados mostraram a importância de empregar a transposição do conhecimento formal matemático para o ensino.

Em 2023, foram duas as teses concluídas, sendo a primeira com o título O GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM GEOMETRIA (GEPGEO) COMO UM ESPAÇO DE APRENDER DOCENTE: CONTRIBUIÇÕES NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO, defendida por Gabriel de Oliveira Soares. A pesquisa buscou retratar a importância para a formação de professores de Matemática na participação em um grupo de pesquisa e ensino. Associou a isso a Base do Conhecimento Matemático para o Ensino, de autoria de Ball, Thames e Phelps (2008). O Grupo de Estudos em Pesquisas em Geometria - GEPGEO, com 13 integrantes, serviu para a análise da pesquisa. Foram coletados 31 encontros periódicos do grupo, realizados no período de setembro de 2019 a dezembro de 2020, por meio de vídeos gravados e analisados de acordo com a metodologia proposta por Powell, Francisco e Maher (2004). Além disso, uma narrativa autobiográfica foi desenvolvida a fim de estabelecer contribuições pessoais da participação no grupo. A partir das análises, foi possível constatar que a participação no GEPGEO promoveu a mobilização dos seis domínios do conhecimento Matemático para o Ensino propostos pelos autores, além de elencar contribuições no aprofundamento de conhecimentos teóricos e práticos acerca da Matemática e do ensino desse componente curricular para seus participantes. Por fim, reafirma o potencial formativo que espaços colaborativos de professores têm em vistas ao desenvolvimento profissional de seus participantes.

A segunda deste mesmo ano teve autoria de Jonhatam da Silva Aquino e intitulou-se MATEMÁTICA E ARTES: ANAMORFISMO NO ENSINO INTERDISCIPLINAR DE GEOMETRIA. Originou-se a partir de sua prática como professor do Ensino Médio e das dificuldades encontradas pelos seus alunos na realização das questões relativas ao Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, uma vez que envolvem visualização de forma acentuada, objeto da Geometria. Ao perceber isso, julgou oportuno trabalhar interdisciplinarmente com Artes e buscou explorar os anamorfismos e responder à seguinte pergunta: Como alunos do Ensino Médio podem estabelecer relações entre Geometria e Artes utilizando anamorfismos?

Para alcançar esse propósito, foram delineados objetivos específicos que incluem o desenvolvimento de anamorfismos utilizando recursos manuais e tecnológicos; investigar os conteúdos matemáticos subjacentes à criação dessas representações visuais, analisar os anamorfismos produzidos pelos alunos, promover o desenvolvimento da visualização geométrica em objetos e figuras do cotidiano, fomentar uma atividade interdisciplinar entre Matemática e Artes por meio dos anamorfismos, e finalmente, avaliar o *feedback* dos participantes quanto à sua aprendizagem. A estimulação da criatividade e verificação de que a visualização matemática pode ser desenvolvida de maneiras não usuais foram os principais resultados concluídos pelos estudantes.

Já no ano de 2024, a tese foi de Anne Desconsi Hasselmann Bettin e teve o título ESPAÇO DE TRABALHO GEOMÉTRICO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM EM TÓPICOS DE SUPERFÍCIES PARAMETRIZADAS, sendo fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval. A autora fez sua pesquisa envolvendo alunos do programa de pós-graduação em que atua. As atividades foram estruturadas com o envolvimento de sólidos e superfícies parametrizadas e, especialmente, superfícies cilíndrica e esférica. Foi construído um Espaço de Trabalho Geométrico (ETG) segundo Kusnik para elaboração de cada um com o auxílio do GeoGebra e com a análise dos construtos de cada um dos participantes. Os diferentes tipos de representações foram realizados, conversões de representações semióticas ancoradas na tríplice análise sugerida por Duval e adaptada para o ETG criado. Concluiu-se a pesquisa, evidenciando, dentre outras contribuições do presente ETG envolvendo a TRRS, que este favoreceu o desenvolvimento de conhecimentos geométricos para o entendimento e a resolução de problemas em tópicos de superfície parametrizada, partindo da visualização para a construção de conceitos e propriedades.

Finalizando, a tese de Juliana Gabriele Kefer com o título APREENSÕES FIGURAIS NO ESTUDO DA GRANDEZA GEOMÉTRICA ÁREA: UMA INVESTIGAÇÃO COM PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS

DO ENSINO FUNDAMENTAL foi defendida em 2025. A investigação envolveu o conceito de área de figuras planas da Educação Básica e teve como objetivo geral analisar como atividades pautadas nas apreensões figurais e no modelo teórico de área como grandeza geométrica podem contribuir para a compreensão do processo de ensino e de aprendizagem de Geometria por professores de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Envolveu a análise de questões da OBMEP; e um curso de extensão com professores de Matemática da Educação Básica. Sobre possíveis contribuições das atividades realizadas no curso de extensão para sua prática docente, os principais aspectos mencionados foram quanto às modificações nas figuras, aspectos visuais de forma geral, e relacionados com os recursos didáticos.

Em relação às teses de doutorado e a síntese das mesmas, conforme Quadro 2 e descrições feitas, podemos observar que já na primeira delas uma Geometria Não-Euclidiana clássica foi abordada, ou seja, uma investigação em Geometria Esférica, incluindo aspectos importantes da trigonometria nesta geometria assim como outras relações comparativas com a Geometria Euclidiana o que produziu um efeito positivo nos indivíduos investigados que julgaram oportunas, pertinentes e atrativas as atividades realizadas. A Geometria Fractal, abordada na segunda tese concluída, pode ilustrar como alguns fractais podem estabelecer relações geométricas importantes para o ensino de diversos conteúdos de Geometria que constam de orientações curriculares e que podem ser realizadas com construções geométricas relativamente simples e importantes de serem exploradas com ferramentas tanto usuais como régua, esquadros, transferidores quanto com recursos tecnológicos como o GeoGebra.

A terceira tese defendida correspondeu a uma retomada sobre o ensino de Geometria Analítica e sua utilização em cursos de formação inicial em Engenharia, ilustrando como poucas são as inovações utilizadas para a realização de transposição didática entre o que é feito na formação inicial do professor de Matemática e o que é, de fato, utilizado na sala de aula de um determinado curso investigado, em específico, bem

como busca na literatura. A quarta tese descreveu a importância de um grupo de estudos para o desenvolvimento de determinada área do conhecimento. Esta foi a temática desta tese em relação ao Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, que tem produzido trabalhos importantes mostrando o quanto pessoas reunidas em uma mesma temática podem produzir bons resultados para o ensino, no caso, em Geometria.

Se houve com frequência dizer que a Geometria está em toda parte. No entanto, são poucas as investigações realizadas concretamente de forma interdisciplinar. A quinta tese ilustrou como é possível estabelecer esta relação entre Geometria e Artes utilizando os anamorfismos para o desenvolvimento de Geometria no Ensino Médio. A sexta tese abordou a criação de um Espaço de Trabalho Geométrico em que curvas e superfícies parametrizadas puderam ser abordadas em um nível superior para a Geometria. Para isso foram criadas atividades utilizando o *software* GeoGebra.

Por fim a mais recente tese fez uma pesquisa exploratória sobre questões do ENEM a fim de analisar as compreensões figurais sobre a grandeza área envolvendo um grupo de professores atuantes na escola básica em forma de oficina pedagógica.

Para finalizar as orientações realizadas por nossa prática pedagógica, no Quadro 3, ilustramos 3 orientações de pós-doutorado realizadas.

Trabalhos em pós-doutorado

Quadro 3 – Orientações de pós-doutorado realizadas

Data	Orientandos	Temática
2019	Dra. Carmen Vieira Mathias	A VISUALIZAÇÃO COMO UMA FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM EPISTÊMICA E O POTENCIAL DIDÁTICO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS
2022	Dr. Sérgio Bermudo Navarrete	REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS
2023	Dr. Mauricio Ramos Lutz	A VISUALIZAÇÃO PARA DESENVOLVER O PENSAMENTO GEOMÉTRICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Fonte: autoria própria.

A primeira orientação em pós-doutorado foi de Carmen Vieira Mathias e seu projeto teve o título acima citado em que a orientanda se baseou em Hilbert e Cohn-Vossen (1983) ao enfatizarem que, com a ajuda da intuição e da visualização, é possível esclarecer uma variedade de fatos e problemas de Geometria, e além disso, em muitos casos tais capacidades podem fornecer um esboço que possibilita métodos de investigação e prova. A referida é professora da Universidade Federal de Santa Maria, onde atua na formação de professores de Matemática e busca avançar suas pesquisas ao nível mais avançado e como participa do GEPGEO, percebeu ampliar seus conhecimentos para alcançar seu objetivo. Dra. Carmen teve o objetivo de investigar se a visualização pode ser uma ferramenta de aprendizagem epistêmica ao utilizar o potencial didático das tecnologias digitais ao ensinar/aprender Geometria. Culminou com a publicação do artigo “Desatando nós: desenvolvendo a visualização a partir de experimentos com cordas torcidas” publicado na revista *Zetetiké*, em 2023. Continua atuando na área de forma efetiva e contribuindo para o ensino de Geometria na região e no país.

O segundo orientando de pós-doutorado foi o Dr. Sergio Bermudo Navarrete, da Universidad Pablo de Olavide em Sevilla – Espanha. Veio buscar minha orientação e realizou um trabalho bastante interessante em uma temática que são as representações gráficas. Desenvolveu suas atividades na UFN, onde ministrou algumas atividades relativas à temática para meus alunos em uma disciplina de Geometria de minha responsabilidade. O Dr. Sérgio proferiu palestra para professores do programa e para os participantes do GEPGEO. Além disso, desenvolveu-se no aprofundamento da temática em estudos conjuntos, incluindo intercâmbios com colegas da Colômbia e México. Isso nos levou a produzir o artigo intitulado “Representación Gráfica: recurso heurístico-didáctico para la enseñanza-aprendizaje de la Matemática”³, o qual foi publicado em 2024 em conjunto com um colega colombiano, outro espanhol e nós dois.

O Dr. Mauricio Ramos Lutz, do Instituto Federal Farroupilha, da cidade de Alegrete, no sul do Brasil, cumpriu com os objetivos propostos, tendo-os desenvolvido com competência e muita produtividade. Além de participar de

³ NAVARRETE, S. B. (Sergio Bermudo Navarrete)\. <https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/7243> 2024

bancas de dissertação/tese e organização de eventos na instituição de origem e na Universidade Franciscana. Houve produção científica, algumas já publicadas e outras em conexão com membros do Grupo de Ensino e Pesquisas em Geometria no qual tem efetiva participação desde antes do ingresso neste projeto. Foram publicados em 2023 dois e-books juntamente com o orientador: A visualização para desenvolver o pensamento geométrico na resolução de problemas⁴. O segundo foi um livro eletrônico Geometria fractal com apoio dos registros de representação semiótica e da tecnologia educacional⁵. Além de trabalhos diversos publicados em eventos, houve continuação da parceria para além do tempo do pós-doutorado como a publicação em 2025 do artigo intitulado Pensamento geométrico, visualização e imaginação no ensino de geometria: estratégias com materiais concretos na formação de professores⁶.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, abordamos uma visão geral a respeito do que temos feito em termos do ensino de Geometria por meio de orientações realizadas na Universidade Franciscana de Santa Maria, na região central do estado do Rio Grande do Sul, Brasil, e que se expandiram para outros locais nacionais e até mesmo internacionais. Ao todo foram, 13 dissertações envolvendo diversas temáticas na área, 07 teses de doutorado e 03 de pós-doutorado. Neste momento temos 03 teses em andamento.

Como analisado em cada trabalho, exploramos com maior intensidade possibilidades de utilizar geometrias não euclidianas para o ensino desta temática nos mais diversos níveis.

Até o presente, foram orientadas todas na área de Geometria, com uma ênfase nas duas clássicas Não-Euclidianas: Esférica e Hiperbólica, oferecendo possibilidades de explorar os modelos de Poincaré e de Klein, o que pode ser feito com o uso de *software*.

Geometria Fractal e Geometria do Táxi foram outras duas não euclidianas estudadas com produção científica e publicadas em diversos

⁴ https://www.terried.com/_files/ugd/03aaa5_14becb298ec64135a83d614a5efbc3a1.pdf

⁵ https://www.terried.com/_files/ugd/03aaa5_587592cb837a486a96c0da5dfacc5930.pdf

⁶ <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/10095>

periódicos. Outras temáticas geométricas foram também utilizadas em trabalhos de pós-doutorado, incluindo um professor espanhol, ampliando o leque de nossas pesquisas.

No presente momento, estamos com três teses em orientação tratando sobre a Teoria de Van Kiele em pesquisa com professores da rede de ensino de Roraima. A segunda analisa os gestos no ensino de Geometria envolvendo futuros professores de Matemática e a terceira tratará da criatividade no ensino de Geometria.

Além disso, nossas pesquisas têm buscado explorar a criatividade, a intuição, a imaginação e a visualização em Geometria, isso tanto envolvendo seres humanos quanto à percepção de Geometria encontrada em ambientes naturais como o formato em arbustos na ornamentação de jardins (toros, paraboloides etc.) quanto nos elaborados pelo homem (Geometria em lixeiras, em construções etc.). Isso tem levado a uma procura de novas alternativas de observar como a Geometria, de fato, se encontra ao nosso redor e não somente nos materiais de uso comum, como é frequente se observar em artigos que ilustram o fazer o ensino da área com a utilização de recursos que estão ao redor, como embalagens, o que não inviabiliza este processo de ensino também visual. Entretanto, entendemos como visualização um processo de maior abrangência, ou seja, um constructo mental, o que favorece sobremaneira a aprendizagem de indivíduos com deficiência visual.

Dessa forma, concluímos que inovações para o ensino de Geometria estão sendo tratadas em nossa instituição e que estão surtindo efeitos, pois nossos egressos continuam produzindo conjuntamente conosco e levando os conhecimentos adquiridos em suas pesquisas e práticas profissionais em suas ações no ambiente em que atuam e participação em eventos.

REFERÊNCIAS

Almouloud, S. Ag.; Manrique, A. L.; Silva, M.J.F. da; Campos, M. M. (2004). A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação* (27) dez 2004.

Brasil. (1998). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Referencial *curricular nacional para a educação infantil* /Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação-Fundamental. — Brasília: MEC/SEF.

Bianchini B.L. ; Lima, G.L. de. (org.). (2023). *Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem*. São Paulo : Editora Livraria da Física. 2023.

Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (3rd ed.). SAGE Publications.

Cyrino, M.C.C.T.; Paula, E. P. de; Estevan, E. J. G. ; Rodrigues, P. H.; Rodrigues, V.R. (2025) *Processos formativos de professores que ensinam matemática e perspectivas para/de aprendizagem e identidade profissional docente/ Bolema*, Rio Claro (SP), v. 39. e240067, 2025. Acesso em 09 set 025.

Giovani Júnior, J. R. ; Castrucci, B. (2018). *A conquista da Matemática*. 8 ano. 4. ed. – São Paulo. FTD.,

Klein, F. (1927). *Matemática Elemental desde un punto de vista superior*. Madrid: [s.n], 1927. V.1 e 2.

Hilbert, D. and Cohn-Vossen, S. (1932). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company.

Duval, R. (2003). *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas, São Paulo: Papirus, 2003.

Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura em Matemática*. Tese (Doutorado em Educação, UFPR). Curitiba, Pr. Brasil.

Mlodinow, L. (2010). *A janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço*. Trad. Enésio E. de Almeida Filho. São Paulo? Geração Editorial.

CAPÍTULO 2

Lógica matemática, legislação, litígio, ludicidade e laboratórios na formação do professor que ensina Geometria

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

Resumo: O presente capítulo trata de circunstâncias vivenciadas pela autora, durante quase cinco décadas, no âmbito dos Cursos de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), na cidade de Niterói, Brasil. Relata a constituição e evolução do curso de Licenciatura sujeitas às limitações da legislação brasileira e ao embate entre docentes com perspectiva educacional compatível com o Movimento da Matemática Moderna e contrários a ele, no ensino das disciplinas. Apresenta a perspectiva educacional da autora relativa à aprendizagem significativa para a criação de um laboratório de Educação Matemática singular, cujas ações contribuíram para a melhoria do ensino de Geometria.

Palavras-chave: Formação de professores. Laboratório de Ensino de Geometria. Aprendizagem significativa.

Resumen: Este capítulo analiza las circunstancias vividas por la autora durante casi cinco décadas en los cursos de Matemáticas de la Universidad Federal Fluminense (UFF), en la ciudad de Niterói, Brasil. Relata la constitución y evolución del curso de pregrado, sujeto a las limitaciones de la legislación brasileña y al choque entre profesores con perspectivas pedagógicas compatibles y opuestas al Movimiento de Matemáticas Modernas en la enseñanza de la materia. Presenta la perspectiva pedagógica del autor sobre el aprendizaje significativo para la creación de un laboratorio único de Didáctica de las Matemáticas, cuyas acciones contribuyeron a la mejora de la enseñanza de la Geometría.

Palabras-clave: Formación docente. Laboratorio de Enseñanza de Geometría. Aprendizaje significativo.

INTRODUÇÃO

Em um livro que trata do ensino de Geometria na América Latina, não se poderia deixar de mencionar as circunstâncias e algumas das consequências da implantação da Licenciatura em Matemática junto ao único Departamento de Geometria instituído em uma universidade pública brasileira. Este texto trata de alguns substantivos iniciados pela consoante “L” e de como eles, metaforicamente, impactaram a formação do professor e o ensino de Geometria durante a atuação da autora, por quase 5 décadas, de 1970 a 2018, no âmbito dos Cursos de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF) na cidade de Niterói, na região metropolitana do Rio de Janeiro, Brasil.

Os temas objeto deste relato são: a Lógica Matemática nos cursos da UFF; a Legislação brasileira e suas consequências; o Litígio entre o formalismo e a aprendizagem significativa; a importância e as limitações da Ludicidade e os Laboratórios de Ensino e de Educação Matemática. Relata-se como esses temas influenciaram a formação de professores de Matemática na UFF, no caminho do licenciando ou do professor em exercício, entre o desencanto e o encantamento, a partir das circunstâncias vivenciadas nesta formação. Apresentam-se as ações realizadas e os desafios enfrentados em um específico laboratório de ensino de Geometria no qual futuros profissionais ou profissionais em formação continuada eram levados a tomar consciência, com o auxílio da Geometria, de suas próprias dificuldades na aprendizagem dos conceitos matemáticos, com vistas ao entendimento das dificuldades potencialmente apresentadas por seus aprendizes, tanto crianças como jovens ou adultos.

Embora a autora já tenha divulgado diversos relatos versando sobre os temas aqui narrados, como em Kaleff (2001, 2012, 2016 a, 2024), ela acredita ainda ser válido documentar circunstâncias, fatos e desafios do passado, com seus erros e acertos, para que estes não caiam no esquecimento e possam servir de preceito no futuro. Muitos dos fatos já narrados, ainda que apresentados em formato digital ou em mídia virtual, têm sido

desconsiderados nos ambientes acadêmicos. Isso acontece ou por negligência das instituições mantenedoras dos sites que, por alguma razão, os eliminam ou pelo desinteresse de pesquisadores mais jovens por considerá-los, talvez, desatualizados e sem relevância histórica ou científica.

A presente narrativa tem início com a apresentação dos Cursos de Matemática da UFF desde sua fundação e constituição no âmbito da Universidade, e da formação do seu corpo docente; apresenta as características profissionais singulares de alguns dos professores que influenciaram o desenvolvimento destes Cursos durante quase quatro décadas; segue com o relato das circunstâncias críticas e desafiadoras para o corpo docente, em que os currículos foram renovados com a inserção de disciplinas ligadas à Geometria e à Educação Matemática; relata a importância da criação de um laboratório de ensino nesse contexto e finaliza com a descrição de alguns dos fatos e circunstâncias ocorridos neste laboratório, entre 1994 e 2018, que contribuíram para a melhoria do ensino de Geometria na Licenciatura de Matemática da UFF.

A LÓGICA MATEMÁTICA NOS CURSOS DA UFF

Em 1949, em Niterói, na então Faculdade Fluminense de Filosofia (FFF), foram criados os Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática, sendo que ambos tinham como modelo os currículos implantados na Faculdade Nacional de Filosofia da Universidade do Brasil (atual Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ). Enquanto o Bacharelado contemplava quatro anos para a formação em conteúdos matemáticos, três dos quais em comum com a Licenciatura, esta última era complementada por mais um ano de conteúdos educacionais. Formação conhecida, no Brasil, como *formação 3+1*.

Na Licenciatura da UFF, as disciplinas educacionais sempre tiveram docentes muito bem-preparados e ligados ao ensino de escolas básicas da região. Assim, em 1952, ao ser ministrada pela primeira vez, a disciplina *Didática Especial da Matemática* teve como docente Ceres Marques de Moraes, também professora do Liceu Nilo Peçanha, em Niterói, escola com

reconhecido padrão de excelência. Esta professora, com grande conhecimento de Didática, publicou o livro *Apostilas de Didática Especial da Matemática* em coautoria com os professores Júlio Cesar de Mello e Souza, mais conhecido pelo pseudônimo *Malba Tahan*, e Manoel Jairo Bezerra, ambos do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro.

Em Moraes, Souza e Bezerra (1958), é enfatizada a importância da Geometria escolar na formação integral do aluno, bem como a da vivência em práticas empíricas envolvendo “descobertas” em uma “Sala ambiente”, por meio da manipulação de materiais concretos, incluindo “jogos de aprendizagem” para o ensino de vários temas da Matemática escolar.

Os Cursos de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da UFF contavam com a participação da professora Moraes, que veio a alcançar a livre-docência na área de Fundamentos de Matemática no início dos anos 1970. Assim, ambas as formações tinham uma professora versada no caráter abstrato dos conteúdos matemáticos, porém consciente do papel e da eficácia dos recursos didáticos manipuláveis no caminho do ensino e da aprendizagem, visando à abstração e à generalização destes conteúdos, conforme se pode constatar nos tópicos escritos por ela: “Tipos de materiais didáticos para o ensino de Matemática” e “Condições básicas de eficiência no material didático do ensino” (Moraes, Souza & Bezerra, 1958, p. 119-131). Entre os recursos didáticos, a professora ressaltava:

Material analítico ou de observação. Exemplos: corpos geométricos, modelos para observação e análise de algumas proposições geométricas para o ensino de projeções, para o ensino de números irracionais etc.

Material experimental ou demonstrativo. Exemplos: aparelhos para demonstração intuitiva do teorema de Tales, do de Pitágoras, da igualdade de triângulos, da equivalência de área, da geração de sólidos, da variação das linhas trigonométricas etc. (p. 129).

Portanto, na UFF, desde os seus primórdios, já era veiculada a potencialidade educacional de uma sala ambiente com características semelhantes às aquelas que dariam origem a um “laboratório” para o ensino de Matemática, nas décadas seguintes.

É particularmente importante, ainda, ser lembrado o nome do professor Constantino Meneses de Barros, integrado à FFF em 1958. Com doutorado na França e com reconhecimento internacional na área de Geometria Diferencial, trazia para a FFF um olhar acadêmico diferenciado, voltado para várias áreas de pesquisa em Geometria, mas que também valorizava o seu ensino.

No entanto, foi outro professor que iria influenciar profundamente os rumos de ambos os Cursos de Licenciatura e Bacharelado, ao ser integrado ao corpo docente da UFF, também em 1958: o professor Jorge Emmanuel Ferreira Barbosa, oriundo do Instituto Militar de Engenharia do Rio de Janeiro. Interessado em Lógica Matemática, em Fundamentos de Matemática e em Análise Matemática, fez com que estas áreas passassem a ser priorizadas nas reflexões de outros professores, pois iam ao encontro das mudanças que aconteciam no ensino de Matemática em âmbito mundial. Estas mudanças eram influenciadas pelo movimento que ficou conhecido como *Movimento da Matemática Moderna (MMM)*, que começava a chegar ao Brasil e que levou não só os professores niteroienses a se interessarem por pesquisas e a sintetizar as reflexões trazidas pelo MMM, mas também motivou vários outros grupos brasileiros de estudos, espalhados por diversos estados.

O MMM foi um movimento internacional, surgido no começo da década de 1960, que visava reformular o ensino de Matemática em todos os níveis do sistema educacional. Entre suas premissas estava o banimento dos desenhos e figuras dos livros didáticos e a negação da importância da Geometria Euclidiana para a Matemática, relegando seu ensino a segundo plano. Além disso, baseado na formalidade e no rigor da Teoria dos Conjuntos, enfatizava o ensino precoce da Álgebra abstrata, até mesmo para adolescentes. Em Kaleff (1990), a autora relata como alguns aspectos do MMM repercutiram no Brasil e apresenta considerações advindas de professores brasileiros, incluindo niteroienses, sobre as consequências das ações educativas relacionadas ao proposto pelo Movimento.

Cabe enfatizar que o MMM seguia as orientações de um grupo de renomados matemáticos que atuavam desde a década de 1930 sob o pseudônimo *Nicolas Bourbaki*, os chamados *bourbakistas*, que propunham uma reconsideração da Matemática, fundamentada na Teoria dos Conjuntos, partindo de axiomas claramente estabelecidos, deduzindo resultados a partir de inferências lógicas e provas rigorosas, focando em estruturas abstratas (como grupos, anéis e espaços topológicos) e priorizando a clareza, a precisão e a completa ausência de elementos intuitivos nas demonstrações. Ou seja, entendendo a Matemática de forma unificada como um todo coerente construído, camada por camada, a partir de estruturas fundamentais.

Em 1963, por influência das pesquisas *bourbakistas* realizadas por um grupo de docentes liderados pelo professor Barbosa, foi introduzida em ambos os currículos dos Cursos de Matemática a disciplina *Lógica Matemática*.

Cabe aqui lembrar que, em 1964, várias faculdades isoladas de Niterói compuseram a Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, a qual, em 1965, tornou-se a Universidade Federal Fluminense (UFF).

A influência da área de estudos de Lógica Matemática foi se intensificando de tal forma que, por ocasião da criação do Instituto de Matemática (IMUFF), em 1969, veio a dar o nome a um dos três novos departamentos que o constituíram. As disciplinas dos cursos passaram a ser ministradas por professores oriundos da antiga FFF e da Escola de Engenharia, lotados nos departamentos de Análise e Lógica (GAN), de Matemática Aplicada (GMA) e de Geometria (GGM).

A estrutura departamental do IMUFF foi mantida até 1985, quando se transformou no Instituto de Matemática e Estatística (IME) com o acréscimo do Departamento de Estatística, enquanto o Departamento de Análise e Lógica passou a se chamar simplesmente de Departamento de Análise.

A LEGISLAÇÃO BRASILEIRA E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Para atender à legislação advinda da *Reforma Universitária Brasileira* (Lei 5540/68), a qual instituiu o regime letivo semestral e a estrutura curricular composta por um ciclo básico, um ciclo profissional e um conjunto de disciplinas optativas, foi necessária uma intensa reformulação dos Cursos de Matemática da UFF, que foi implantada em 1971. Com a reforma, ambos os cursos passaram a ter suas disciplinas divididas em um ciclo básico comum e um ciclo profissional diferenciado, com a duração de quatro semestres letivos cada. Todavia, a Licenciatura continuaria seguindo o modelo (3+1) original, pois sua grade curricular se diferenciava da do Bacharelado pela observação: “Matérias Pedagógicas nos termos da Resolução nº 27/70 do Conselho de Ensino e Pesquisa da UFF”. Ainda em 1971, a Lei 5692/71 fixou as diretrizes de implantação do ensino de 1º e de 2º Graus (atuais, Fundamental e Médio) nas escolas, o que acarretou nova reformulação em todas as Licenciaturas. Esta última só foi implementada na UFF em 1976.

A partir de 1971, passaram a fazer parte da grade curricular, desde o primeiro semestre letivo, as disciplinas *Lógica Matemática* e *Análise Matemática*, enquanto do ciclo profissional constavam *Análise Superior* e *Fundamentos de Matemática*, o que caracterizaria os cursos da UFF nas três décadas seguintes. Estas disciplinas tinham por base a teoria das *Sistematizações Universais* desenvolvida pelo professor Barbosa, fundamentação também subjacente a todas as demais disciplinas ligadas ao GAN. Esta teoria, apresentada em Barbosa (1970), de perspectiva *bourbakista*, envolvia conceitos lógicos e matemáticos, criados pelo professor, e representados em uma linguagem simbólica própria, Barbosa (1971), utilizada somente na UFF.

Cumprе salientar a ausência, no ciclo básico, de duas disciplinas fundamentais tanto para a formação matemática do bacharel quanto para a do futuro professor. A disciplina *Geometria Euclidiana* não constava de uma grade que, no entanto, já oferecia *Geometria Diferencial* e *Geometria Proje-*

tiva, indicando que, aparentemente, os docentes do GGM estavam convencidos de que as disciplinas *Construções Geométricas*, *Geometria Analítica* e *Geometria Linear* eram suficientes para fornecer uma base sólida para o conhecimento geométrico necessário ao ciclo profissional. Também não constava da grade do ciclo básico a disciplina *Cálculo Diferencial e Integral*, embora a mesma já devesse fazer parte da grade curricular do currículo mínimo dos cursos de Matemática desde a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1961).

Apenas em 1976, a disciplina *Cálculo Diferencial e Integral* passou a fazer parte da grade curricular dos Cursos de Matemática. Porém, *Geometria Euclidiana* continuava ausente, como pode ser constatado nas grades curriculares apresentadas em Kaleff e Rosa (2014).

Também em 1976, com a conclusão da reformulação das Licenciaturas com vistas ao Ensino Fundamental e Médio, foi oferecido um conjunto de quarenta disciplinas optativas no qual, no entanto, inexplicavelmente, somente três eram especificamente voltadas para a formação do professor...

O LITÍGIO ENTRE O FORMALISMO E A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Sendo professora do GAN desde 1970, a autora vivenciou as mudanças educacionais anteriormente mencionadas, decorrentes da legislação. No entanto, já nos dois primeiros anos de sua atuação, percebia que, nos bastidores dos Cursos de Matemática, ocorria um litígio entre os docentes que aceitavam a hegemonia da Lógica Matemática e aqueles que a rejeitavam, mas, aparentemente, toleravam. Este litígio era velado e encoberto por um denso silêncio...

Cabe também mencionar que, desde 1970, a autora vinha buscando ferramentas que permitissem uma melhoria no ensino das disciplinas de Análise Matemática, sob a orientação do professor e livre docente desta área, Aldemar Pereira Torres, sem a influência das teorias vigentes no GAN. Assim, em dezembro de 1972, para concluir seu mestrado no âmbito

do programa de Pós-graduação da UFF, a autora apresentou uma dissertação que tratava da generalização do conceito de Integral de Lebesgue para reticulados vetoriais, adotando dois caminhos teóricos: um pela Teoria da Medida e outro pela Teoria da Aproximação de Funções. No âmbito desta dissertação, foi desenvolvido um exemplo particular que leva à integral de Riemann no $\mathbb{R}^2$ e que podia ser ministrado no nível da graduação em Matemática, o que foi efetivamente realizado pela autora (Kaleff, 1972). Após a conclusão do mestrado, a autora foi convidada pelo professor Barros a realizar uma pesquisa cujo objetivo era integrar os estudos teóricos até então realizados em Análise Matemática a aplicações na Geometria Diferencial.

Concluído o mestrado, ao se preparar, em 1973, para ministrar as disciplinas *Análise Matemática* e *Análise Superior*, a autora constatou a ausência de quaisquer aplicações práticas nestas disciplinas. Dada também a ausência de uma disciplina de *Cálculo Diferencial e Integral* na grade curricular, ela ponderou, em conjunto com o coordenador do Setor de Análise, Professor Torres, que a inclusão de tópicos de Cálculo poderia melhorar o entendimento dos alunos relativamente aos conceitos básicos tratados nas disciplinas de Análise. Entretanto, embora gerando resultados positivos junto aos alunos, a implementação dos tópicos de Cálculo nas disciplinas por ela ministradas não foi bem aceita pela direção do GAN. Como consequência, a autora foi convidada a deixar o Departamento de Análise e se transferiu para o Departamento de Geometria.

O desencanto e o desalento, vivências e circunstâncias na UFF

Foi, portanto, em um ambiente tensionado por duas perspectivas acadêmicas em conflito, que a autora observou que, da mesma forma que nas disciplinas da área de Análise, influenciadas pela sistematização lógica, as disciplinas da área de Geometria também sofriam a influência da visão *bourbakista* e, como consequência, levavam ao desencanto e ao desalento de muitos graduandos frente à excessiva abstração e ao rigor exagerado com que os conteúdos eram tratados, alheios às realidades escolar e científica fora da UFF.

A autora se transformara em uma das vozes críticas à hegemonia instituída pelo GAN, pois percebia que o desalento, tanto do licenciando como do bacharelado, provocava a evasão escolar. Este desalento era causado pelo fato de os graduandos se sentirem obrigados a utilizar uma linguagem matemática particular, restrita à UFF, e por não serem preparados, nas disciplinas básicas, para enfrentarem a formalização, a abstração e as generalizações matemáticas exigidas na maioria das disciplinas que se sucediam. Os graduandos alegavam que lhes faltava o suporte dos conhecimentos necessários, complementares aos do Ensino Médio, notadamente os geométricos euclidianos.

No ano de 1974, ao ministrar pela primeira vez a disciplina *Fundamentos de Geometria* do ciclo profissional, a autora levou os licenciandos a analisarem partes de dois dos textos, considerados à época fundamentais aos estudos da disciplina, a saber: Choquet (1964) e Dieudonné (1964). Estes textos serviram de base a polêmicas sobre a formação do professor de Matemática, pois muitos pesquisadores contrários ao MMM, como o francês Georges Glaeser, enfatizavam a importância de se levar o futuro professor a realizar uma análise das diferenças entre o desenvolvimento axiomático da Geometria Euclidiana preconizado por Gustav Choquet, frente ao desenvolvimento analítico e ao vetorial, defendidos pelo *bourbakista* Jean Dieudonné. Através da utilização destes textos na disciplina, a autora tomou consciência das grandes dificuldades que apresentavam muitos licenciandos na elaboração formal dos conceitos geométricos elementares e que elas não eram reduzidas nem com a abordagem das construções geométricas defendidas por Choquet nem com a versão analítica, e muito menos com a vetorial, de Dieudonné. Tal conscientização levou a autora aos primeiros questionamentos sobre a possibilidade da existência de fatores não relacionados ao âmbito teórico dos conteúdos matemáticos, mas advindos de circunstâncias relacionadas aos métodos de ensino adotados, como responsáveis pela falta de entendimento dos conteúdos geométricos.

Vale mencionar que, nas décadas de 1960 a 2000, ocorreram grandes mudanças no ensino de Matemática devidas às pesquisas realizadas por vários grupos de educadores e matemáticos contrários ao MMM. A autora foi influenciada por muitos destes grupos, porém foram algumas circunstâncias vivenciadas em Hamburgo, na Alemanha, que determinaram, nas décadas seguintes, a sua atuação como professora de Geometria e influenciaram sua perspectiva educacional diferenciada no âmbito da UFF. Em 1976, descontente com o rumo tomado pelo Curso de Licenciatura, após solicitar licença sem vencimentos da UFF, a autora deixou o Brasil.

Vivências além dos muros da UFF

Foi o contato com crianças que frequentavam a Escola Waldorf de Hamburgo que chamou a atenção da autora para a pedagogia diferenciada ali praticada. Esta escola tinha, e ainda hoje tem, por base a linha filosófica chamada “*Antroposofia*”, criada pelo alemão Rudolf Steiner no início do século XX. Para esse filósofo, o pictórico, o artístico, o rítmico (fazer com o corpo todo) e o manipulativo (fazer com as mãos) permitem que as ideias e conceitos sejam incorporados ao aprendiz de maneira natural e livre de abstrações. Assim, esta escola tem como um dos princípios educacionais o “manipular consciente” (*handeln mit Bewusstsein*), ou seja, o agir individual, com as mãos, envolvendo a atenção, o pensamento e o sentimento. Desde bem pequenas, as crianças vivenciam ações que visam ao entendimento do significado matemático, mas que respeitam as singularidades de cada aprendiz. Para tanto, os conceitos aritméticos e geométricos básicos são ministrados de maneira empírica e integrada a ações manipulativas e rítmicas. Por exemplo, com o emprego de dobraduras de papel para a percepção sensorial de formas e padrões geométricos elementares ou com as batidas das palmas das mãos, no acompanhamento do ritmo de uma canção folclórica, para a percepção dos padrões das partições fracionárias dos compassos musicais.

O contato com a pedagogia alemã da escola Waldorf, como, por exemplo, apresentada em Lanz (1979), e outras vivências na Alemanha

levaram a autora a se interessar pela Psicologia Cognitiva voltada à Educação, envolvendo a percepção humana dos padrões artísticos, geométricos e linguísticos. Como narrado a seguir, este interesse foi determinante para as ações realizadas pela autora na volta à UFF, em 1980.

Novas vivências e circunstâncias na UFF

Na volta à UFF e procurando ainda encontrar uma explicação para as dificuldades apresentadas pelos licenciandos no caminho da busca pela abstração e formalização dos conceitos, a autora adotou conceitos *bourbakistas* na disciplina *Complementos de Geometria*, ministrada em 1982, abordando a Geometria das Transformações. Esta, concebida como *geometria dos movimentos das figuras rígidas* pelo matemático Félix Klein em 1872, envolve a estrutura algébrica conhecida como grupo das isometrias no plano euclidiano, conforme apresentado em Ledergerber- -Ruoff (1982). A autora visava observar de que forma os licenciandos lidavam com o conceito de grupo, bem como com as relações de isomorfismo entre grupos, ao serem abordadas, simultaneamente, sob as perspectivas analítica e vetorial, supostamente dominadas pelos alunos. Esta estrutura de grupo das isometrias era abordada em duas disciplinas de *Geometria Analítica* e, em casos particulares de aplicação, nas disciplinas *Álgebra Linear* e *Álgebra Vetorial*.

Como em 1974, foi novamente constatado que os licenciandos, apesar das vivências anteriores, no ciclo básico, com as várias formas de tratamento dos conceitos geométricos, não estavam aptos a trabalhar com as diferentes representações (gráfica euclidiana, analítica cartesiana, vetorial e matricial), nem a transitar entre elas fazendo conversões entre uma e outra e, muito menos, a perceberem a estrutura de grupo subjacente. Isto vinha, mais uma vez, contrariar as postulações do MMM e dos *bourbakistas*, sobre as vantagens educacionais da generalização dos conceitos em estruturas algébricas gerais, bem como da superioridade das representações vetorial e matricial sobre as euclidianas.

Estas constatações vinham dar força ao questionamento da autora, iniciado em 1974, sobre o desenvolvimento do conhecimento geométrico

não depender exclusivamente da teoria matemática envolvida, mas também da maneira pela qual esta teoria era trazida ao conhecimento do licenciando. Assim, durante as duas décadas seguintes, ela se dedicou ao estudo das obras de vários pesquisadores envolvidos com o entendimento do papel da investigação e da experimentação no estabelecimento de uma rede mental que permitisse ao aprendiz fazer conexões entre conceitos, estabelecer padrões e gerar novas relações de significado na aprendizagem geométrica. Em Kaleff (2016; 2022), são apresentados como estes estudos vieram a se relacionar ao uso de recursos concretos na aprendizagem geométrica, ao entendimento da habilidade da visualização, ao papel das linguagens envolvidas e ao efeito das representações geométricas (em desenhos, gráficos, figuras etc.), e de como estes temas se relacionam com a compreensão do significado dos conceitos. Os estudos eram fundamentados em educadores como Rudolf Steiner, Jean Piaget e educadores matemáticos como Rina Hershkowitz, Dinah e Pierre van Hiele, Zoltan Dienes, Alan Hoffer, Norma Presmeg, Raymond Duval, Gerald Goldin e outros, e resultaram na tese de doutorado da autora, como apresentada, resumidamente, em Kaleff (2007).

Na busca de respostas aos questionamentos que a mobilizavam, a autora iniciou estudos sobre o *Modelo de van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico* (van Hiele, 1984), o que levou a alguns projetos submetidos à avaliação do IME. Os professores do GAN manifestaram pouco interesse na teoria apresentada, pois a consideravam limitada ao ensino de Geometria Euclidiana, provavelmente, por não perceberem o seu potencial e nem as possíveis correlações com outras áreas da Matemática. No GGM, os projetos foram rejeitados com a alegação de não se encaixarem em uma pesquisa teórica sobre um ramo da Geometria, pois estavam ligados à Educação Matemática. A partir de então, a autora passou a realizar a maioria das suas pesquisas sobre o Modelo de van Hiele em projetos de extensão e de iniciação científica, o primeiro deles apresentado em Kaleff, Figueiredo, Henriques e Rei (1994).

Na verdade, o Modelo de van Hiele foi o ponto de partida para os estudos sobre a habilidade mental, conhecida em nossos dias como *habilidade* da visualização, e sobre a sua influência na aprendizagem e, principalmente, no ensino. Estes estudos apontavam para o fato de que muitos dos conflitos surgidos em sala de aula eram (e ainda são) fruto do desconhecimento da existência de características mentais, individuais, relativas à visualização, dos atores envolvidos no processo educacional. Tais características fazem com que cada um (professor e aluno) perceba, com maior ou menor acuidade, partes de um desenho, de uma figura ou de um gráfico. São considerados *visualizadores* os indivíduos que recorrem prioritariamente aos grafismos para entenderem os conceitos matemáticos, enquanto são não *visualizadores* ou *analísadores* os que necessitam de outras representações, como as algébricas e algorítmicas, para um melhor desempenho no entendimento dos conceitos. Geralmente, o conflito *visualizador x analisador* se estabelece em uma sala de aula quando o professor é um analisador e não considera a individualidade do aprendiz que pode ser um visualizador, como relatado em Kaleff (2016 b, p. 20-24).

É importante lembrar que, embora rodeada pelo ceticismo de alguns colegas docentes do IME frente aos estudos advindos da área de Educação Matemática, a autora percebia, durante toda a década de 1980, que o litígio entre os professores mais antigos adeptos da Lógica Matemática, sob a perspectiva do MMM, e aqueles que reconheciam a necessidade de renovação, se concretizava cada vez mais.

Também é relevante citar que, em 1981, veio a se juntar ao corpo docente do GMM o professor Celso José da Costa, cuja área de pesquisa era a Geometria Diferencial, em especial a teoria das superfícies mínimas. Sempre muito atuante nos cursos, assumiu disciplinas básicas devido ao seu interesse pela melhoria da formação inicial do alunado. Como em 1982, ele descobriu as equações de uma superfície mínima que atualmente leva o nome de *Superfície Costa*, tornando-o conhecido internacionalmente, ele se ausentou da UFF para um longo período de pós-doutoramento (1987-1990). Embora a distância, a voz deste professor também ecoava em Ni-

terói e se tornou mais forte quando retornou, influenciando as ações realizadas, não só no GGM, mas em todo o IME. Atuou intensamente na área da educação a distância visando à criação, em 2001, do Curso de Licenciatura em Matemática a Distância da UFF e, em 2008, do Curso de Especialização *lato sensu* Novas Tecnologias para o Ensino de Matemática (NTEM), ambos ligados à Universidade Aberta do Brasil (UAB).

Este era o cenário em que se encontrava o IME, no final da década de 1980.

Uma nova grade curricular e a inclusão da disciplina Geometria Euclidiana

Considerando que o grupo de professores do IME, descontentes com o rumo dado aos Cursos de Matemática, ia se fortalecendo e aumentando, uma reformulação curricular aconteceu em 1988. Esta tinha como principal objetivo o resgate da disciplina *Geometria Euclidiana* para o ciclo básico.

A nova grade curricular teve como consequência a retirada de boa parte da carga horária das disciplinas *Análise*, *Lógica Matemática* e *Fundamentos da Matemática*, sendo substituídas por *Cálculo Diferencial e Integral (I, II e III)*, *Introdução ao Computador* e *Geometria Euclidiana*. Finalmente, esta disciplina vinha integrar as grades curriculares do Bacharelado e da Licenciatura!

Para a Licenciatura, além das disciplinas da Faculdade de Educação, passaram a fazer parte duas da área de Educação Matemática, ligadas a departamentos do IME. No entanto, na denominação dessas novas disciplinas não constava nenhuma menção à área de conhecimento, pois foram chamadas de *Tópicos de Matemática Elementar* e *Tópicos de Matemática e Realidade*, alocadas no GAN e GGM, respectivamente. Essa foi a forma com que temas da área de Educação Matemática foram inseridos na Licenciatura, ou seja, sem haver, na grade curricular, uma referência explícita específica à área.

A criação do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) e novas circunstâncias marcantes para o ensino de Geometria

Cabe lembrar que a professora Moraes, desde a década de 1950, chamava a atenção para a importância de se ter, na escola e nas Licenciaturas (para a formação do professor), uma sala ambiente, na qual se desenvolvessem práticas por meio da manipulação de materiais concretos. Assim, em 1994, com a colaboração de alguns ex-alunos desta professora, agora docentes do IME e pertencentes ao grupo daqueles que não aceitavam o descaso com o ensino da Geometria Euclidiana, a autora fundou o Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), no âmbito do GGM. Portanto, o LEG também foi fruto do litígio há muito estabelecido. No entanto, para ser institucionalizado no IME, aceito como instância do GGM e blindado de embates com a Faculdade de Educação da UFF, foi necessário que, no nome do laboratório, constasse “Ensino” de Geometria e não “Educação” Matemática.

Embora na UFF o interesse pela renovação do ensino de Geometria, para ser levado à escola, fosse bem restrito, é importante lembrar que, em 1989, foi publicado o livro *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, sob os auspícios da associação norte-americana de professores de Matemática. Essa obra, conhecida como os Standards, foi um marco fundamental, em âmbito mundial, para o movimento de recuperação da Geometria como tema relevante da matemática escolar, além de ser um documento de significativa representatividade acadêmica no processo de rejeição ao MMM.

Por sua vez, no Brasil, foram os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) que chamaram a atenção para a importância de atividades ligadas à resolução de situações-problema significativas para os alunos e para o desenvolvimento de competências e procedimentos matemáticos, com ênfase nos geométricos. Esta perspectiva dos PCN seguia a de vários documentos internacionais, principalmente os *Standards* e outros que, desde o final da década de 1980, já destacavam a importância de que, desde o início de sua formação, o futuro professor deveria vivenciar

práticas ativas intermediadas por recursos didáticos concretos. A forma pela qual os PCN e outros documentos impactaram as ações no LEG será narrada mais adiante.

Mudanças no sistema educacional brasileiro e um novo currículo da Licenciatura

Cabe ressaltar que a UFF, bem como todo o sistema acadêmico educacional brasileiro, foi mais uma vez, impactada pela legislação, com várias leis e decretos implementados a partir de 1992. Estes trariam mudanças significativas nas regras da economia do país e repercutiriam tanto sobre a aposentadoria dos servidores federais em geral quanto sobre a admissão de novos docentes nas universidades, em particular. Estes últimos deveriam ser doutores e trabalhar em dedicação exclusiva à instituição. Assim, resultou que, no IME, cerca de 30% dos docentes mais antigos se aposentaram, o que teve, e ainda tem, consequências diretas para a Licenciatura. Por um lado, pelo afastamento de docentes que se guiavam pela Lógica Matemática, o que seria algo positivo, porém, por outro, pela agregação de novos docentes que, a despeito de sua excelência na formação matemática, geralmente não possuíam experiência de atuação em escolas ou não tinham conhecimento do sistema educacional brasileiro.

Nos anos seguintes, com a redução do litígio e das barreiras de resistência a mudanças curriculares decorrentes do afastamento dos professores antigos, abriu-se espaço para a revisão do currículo. Após quatro anos de intensas discussões entre os professores, ocorreu, em 1998, finalmente, a tão esperada reformulação curricular dos Cursos de Matemática.

A nova grade curricular trazia uma inovação radical aos cursos com a inclusão das disciplinas *Geometria Básica* e *Matemática Básica*, que possibilitavam ao aluno ingressante adquirir ou revisar conteúdos euclidianos e do Ensino Médio, de maneira mais profunda e fundamentada. Com estas novas disciplinas, visava-se dar um embasamento às disciplinas *Geometria Analítica* e *Cálculo Diferencial e Integral*, do que, potencialmente, resultaria a diminuição das reprovações nessas disciplinas.

Visando ao equilíbrio entre as formações matemática e pedagógica necessárias ao professor, conforme os preceitos da Educação Matemática, foram acrescentadas à Licenciatura, além das disciplinas obrigatórias da Faculdade de Educação, as disciplinas: *Fundamentos de Geometria-Construções geométricas, História da Matemática, Educação Matemática-Análise e Álgebra, Laboratório de Educação Matemática e Educação Matemática-Geometria*. Além disso, eram oferecidas vinte disciplinas optativas, das quais cinco tinham por objetivo difundir tópicos de Educação Matemática. Entre estas, quatro, denominadas *Estudos Orientados*, visavam integrar as ações realizadas pelos graduandos em projetos de pesquisa, ensino e extensão à grade curricular. Tais disciplinas foram precursoras da obrigatoriedade curricular das ações de extensão nas Licenciaturas da UFF, implementada no começo da década de 2020.

Finalmente, a matriz curricular apresentava um perfil claramente determinado para o licenciado, em cuja grade de disciplinas os conteúdos euclidianos apresentavam o protagonismo apropriado e a Educação Matemática era integrada no IME como área de conhecimento.

A partir de então, outras mudanças curriculares exigidas por determinações governamentais aconteceram, mas que não descaracterizaram o estabelecido para a Licenciatura em 1998, a qual foi totalmente desvinculada do Bacharelado em 2002. No entanto, os concursos para admissão de novos docentes priorizaram sempre aqueles doutores com formação matemática, dos quais poucos se tornaram simpatizantes da área de Educação Matemática. Como consequência, as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem ainda são pouco consideradas no âmbito do IME. Mesmo após a aposentadoria da autora, e passadas quase três décadas da inclusão das disciplinas voltadas para a Educação Matemática, atualmente o GMA conta somente com um professor com mestrado nesta área e doutorado na área de Educação, o GAN tem dois doutores na área de História da Matemática, enquanto o Departamento de Geometria não tem nenhum professor concursado para a área de Educação Matemática.

A seguir, apresenta-se como as circunstâncias anteriormente narradas repercutiram nas décadas posteriores no ensino de Geometria da Licenciatura da UFF e como isso se relaciona com a perspectiva educacional da autora.

O papel da Psicologia Cognitiva na Educação Matemática: um esclarecimento

Neste ponto da narrativa, é importante lembrar que, há muito tempo, a autora havia deixado de se envolver com a Matemática com vistas somente ao desenvolvimento científico desta Ciência. Seu foco passou a ser o entendimento da cognição humana. A Cognição é a área de estudo em que se busca entender como pensamos e nos constituímos como seres humanos, ou seja, como organizamos nossos pensamentos em processos mentais que envolvem a aquisição, o processamento, o armazenamento e o uso do conhecimento e das informações, bem como de que maneira exteriorizamos estes pensamentos no contato com os outros humanos. Para tanto, a autora buscou entender o que muitos pesquisadores da Psicologia Cognitiva relacionada à Educação Matemática consideravam como *representações mentais interiores* e *representações exteriores* dos objetos matemáticos, expressas em diferentes linguagens.

Por outro lado, ao longo de sua trajetória profissional, a autora constatou que a maioria de nós, professores, temos uma forte tendência a agirmos supondo que as pessoas com as quais interagimos possuem uma mente que percebe e reage ao mundo exterior da mesma forma que a nossa, apresentando, portanto, um conjunto de habilidades mentais e representações interiores que os leva a reagir às experiências vivenciadas de maneira semelhante à nossa. Muitas são as pesquisas brasileiras em Educação Matemática, como a de Paiva (1999), que, desde a década de 1980, mostram que muitos professores agem profissionalmente como aqueles que os ensinaram, ou seja, considerando a sala de aula como um coletivo de pessoas que raciocinam como eles próprios. Sob esta perspectiva, os docentes que foram ensinados por meio de aulas expositivas, também assim

o fazem em sua prática. Para muitos, o verbo “ensinar” se confunde com o verbo “aprender”...

Como decorrência, poucos profissionais reconhecem que, em seu aluno, tanto as diferenças físicas individuais como as características mentais singulares o levam a apresentar uma maneira própria de raciocinar e de aprender.

Como a autora sempre acreditou que o trabalho do pesquisador em Educação Matemática é evidenciar contradições, inclusive aquelas que existem em seu próprio campo de pesquisa, a autora acredita, contrapondo-se à visão do profissional que não considera as diferenças individuais, que cada ser humano é único e que, como professoras e professores, pouco conhecemos da mente do outro que está à nossa frente.

Sob esta perspectiva, a maior preocupação da autora foi sempre a manifestação do desencanto e do desalento dos graduandos da UFF, principalmente dos licenciandos, frente às aulas expositivas, fato que seria, possivelmente, responsável pela evasão escolar. Nesta direção, buscava observar os temas veiculados nas diferentes disciplinas e verificar se a forma como eram apresentados aos graduandos incentivava tal evasão.

Circunstâncias preocupantes: novamente o desalento e a evasão no ciclo básico da UFF

Embora a partir de 1998, o currículo da Licenciatura, pretensamente, atendesse ao perfil do licenciando, com o passar dos anos as observações da autora a tornaram menos confiante quanto a esta pretensão, pois percebia que, a cada semestre, o número de alunos nas disciplinas do ciclo profissional (*Fundamentos de Geometria-Construções geométricas, Laboratório de Educação Matemática e Educação Matemática-Geometria*) sob sua responsabilidade, ia diminuindo. A última disciplina em que a autora teve mais de trinta alunos em sala de aula foi em 2004. A partir daí, as turmas foram diminuindo consideravelmente de tamanho, tendo, em média, apenas 8 a 12 alunos (a partir dos 30 originalmente admitidos no curso), devido à reprovação e à retenção dos licenciandos nas disciplinas básicas. No

quadro geral de licenciados da UFF, apresentado na página virtual oficial do *Sistema de Transparência da UFF*, pode-se observar este decréscimo ao longo dos anos. A média de 25 formandos no início da década de 2000 se reduziu para 15 graduados em 2025. Em 2018, ao ser patrona da turma de formandos, a autora constatou 16 licenciados...

Por outro lado, cabe lembrar que, da grade curricular de 1998, também não constava nenhuma disciplina básica em cuja ementa estivessem explícitos temas envolvendo recursos didáticos manipulativos, a não ser os tradicionalmente utilizados nos traçados de desenhos, como régua, compasso e esquadros. Assim, as aulas expositivas continuavam a ser preponderantes e a maioria dos alunos chegava ao ciclo profissional sem ter tido contato com outros tipos de recursos didáticos, concretos ou virtuais, no ensino de Geometria. Mesmo com a tradução do software livre *Geogebra*, realizada pelo professor do GMA Humberto Bortolossi em 2004, até o começo da década seguinte, poucos alunos que chegavam às aulas com a autora, no ciclo profissional, apresentavam familiaridade com este recurso virtual.

O que ocorria na UFF, infelizmente, vinha ao encontro do que vários educadores matemáticos vinham constatando. Ou seja, que as aulas tradicionais em que se abordam os conteúdos matemáticos em um contexto formalizado, no qual se utiliza uma linguagem algorítmica como a algébrica, a vetorial, a matricial etc. e em que se segue uma apresentação expositiva segundo a trilogia “definição, exemplo e teoremas”, raramente levam à aprendizagem do significado dos conceitos, mesmo no caso de adultos.

Estudos na área de Educação Matemática, como os de Paiva (1999), constatavam que poucos são aqueles aprendizes, ainda que adultos, cujas mentes estão aptas a se adequarem à prática expositiva, pois esse tipo de aula leva frequentemente o aluno à memorização de fórmulas e a procedimentos sem a compreensão do significado do conceito matemático a que se referem. Disso decorre que o aprendiz apresenta dificuldade em aplicar o conceito em problemas práticos ou em contextos diferentes.

No que se segue, retornando às perspectivas educacionais advindas da Psicologia Cognitiva e ao papel das linguagens matemáticas para o entendimento do significado dos conceitos matemáticos de adultos, avaliam-se as teorias adotadas nas pesquisas realizadas pela autora e de como elas se relacionam com as práticas educacionais não expositivas, voltadas à melhoria do ensino de Geometria.

Teoria das Representações Semióticas e obstáculos cognitivos

Entre os educadores matemáticos, o psicólogo Raymond Duval, com a chamada Teoria de Representações Semióticas (TRS), é um dos pesquisadores que têm considerado, no ensino e na aprendizagem, o papel das linguagens matemáticas e das relações entre elas, no entendimento do significado dos conceitos matemáticos. Para tanto, em Duval (1995), ele considera a grande diversidade de representações de objetos matemáticos, que envolve símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos ou desenhos etc. e adota a noção de registro semiótico de um objeto matemático para especificar cada modalidade manifestada em uma destas diferentes representações linguísticas.

É importante ressaltar que Duval compreende a natureza e a representação de objetos matemáticos da mesma forma que muitos outros filósofos, matemáticos e educadores matemáticos. Ou seja, que a Matemática lida com objetos abstratos, isto é, objetos não diretamente acessíveis à percepção, e que, por isso, requerem, para a apreensão e o entendimento do seu significado, o uso de representações perceptivas externas concretas, geralmente constituídas por signos, gráficos etc. Assim, para que a compreensão de um objeto matemático aconteça, este não pode ser erroneamente confundido com a sua representação semiótica. O objeto matemático não pode ser considerado como sendo o próprio desenho, signo ou sinal, pois esta ambiguidade pode levar à perda da compreensão do significado matemático.

A TRS de Duval fundamentou pesquisas em diversos níveis educacionais, envolvendo crianças e adolescentes, abordando uma ampla gama de

atividades matemáticas e procedimentos cognitivos. O pesquisador propõe a realização de uma análise dos registros semióticos de um conceito expressado por um aprendiz, para que se possa compreender como este aprendiz entende o significado deste conceito. Este tipo de análise é denominado por Duval de *análise cognitiva*. Por outro lado, em Goldin (1998), comungando com a TRS, encontra-se uma análise de obstáculos ao entendimento apresentados por crianças no contexto da matemática escolar, os quais foram denominados de *obstáculos cognitivos* por limitarem os processos mentais que levam ao entendimento dos conceitos matemáticos em suas diferentes representações.

Até o final da década de 1990, a autora observava que as pesquisas relacionadas ao surgimento de obstáculos cognitivos em adultos eram menos comuns, o que a levou aos estudos envolvendo o desempenho de licenciandos e professores do Ensino Fundamental e Médio, como apresentado a seguir.

Pesquisas sobre obstáculos cognitivos e a visualização

Foram várias as pesquisas realizadas pela autora, envolvendo o desenvolvimento de obstáculos cognitivos devidos à visualização, apresentados por licenciandos e professores, relacionados a temas veiculados nas escolas. Entre elas, foram desenvolvidos estudos voltados para as dificuldades apresentadas no reconhecimento de desenhos de sólidos geométricos presentes nos livros didáticos brasileiros.

Um dos estudos que caracteriza bem estas dificuldades envolveu o caso do corte do tetraedro regular por um plano que passa por quatro pontos médios de arestas deste tetraedro. Segundo as observações preliminares da autora, a maior parte dos sujeitos arguidos sobre esta questão não conseguia identificar a forma da seção decorrente deste corte.

A provável origem do obstáculo cognitivo subjacente a esta dificuldade seria a de o sujeito não visualizar (ver na mente) os pontos médios das arestas do tetraedro e, portanto, não perceber que existem três opções de quatro destes pontos que se encontram sobre um mesmo plano, forman-

do um quadrado. A suspeição sobre a existência deste provável obstáculo cognitivo deu origem a uma das questões apresentadas em um questionário sobre os cinco poliedros regulares de Platão, em uma pesquisa mais ampla, de longo prazo, realizada em cursos presenciais. Esta pesquisa foi repetida anualmente durante 15 anos, de 1996 a 2012. No total, participaram 398 licenciandos de Matemática da UFF e 95 professores do Ensino Fundamental e Médio. Todos tendo cursado, no mínimo, cinco períodos da Licenciatura, com disciplinas de *Geometria Euclidiana* (plana e espacial), *Geometria Analítica* e *Fundamentos de Geometria*, nas quais estudaram os sólidos geométricos.

A questão apresentada era a seguinte: determine a seção plana obtida pelo corte de um plano que passa pelos pontos médios de quatro arestas de um tetraedro regular.

Nas respostas encontradas, somente cerca de 37% disseram corretamente que a seção plana é um quadrado, enquanto 23% deixaram a resposta em branco. Entre as respostas erradas (cerca de 40%), apareceram justificativas que corroboram as observações sobre a existência do obstáculo cognitivo considerado. Algumas dessas respostas erradas (cerca de 8%) negavam a existência da seção plana (explicitamente considerada na questão) e a coplanaridade dos 4 pontos, pois afirmavam explicitamente que: “não forma seção plana”, “esses 4 pontos não são coplanares”, “os 4 pontos não contêm o mesmo plano”, “nenhum plano contém esses 4 pontos”. O mais preocupante foram as respostas (cerca de 2%) que consideraram alguns poliedros como “seção plana”, pois manifestaram que “a seção plana é um tetraedro”, ou “é um octaedro”, “é uma pirâmide”, “é um tronco de pirâmide”, “é uma caixa”.

Outros resultados do mesmo questionário, apresentados em Kaleff (2022), eram ainda mais preocupantes e consolidaram as suspeitas da autora sobre a existência de obstáculos cognitivos relativos ao reconhecimento de desenhos de planificações e de esquemas de sólidos obtidos pelo empilhamento de cubos unitários. No caso das planificações, cerca de 20% dos licenciandos não desenharam corretamente uma planificação do

tetraedro regular, pois apresentaram desenhos de planificações de cubos e prismas hexagonais, de pirâmides de base quadrada, de tetraedro em perspectiva cavaleira, entre outros ainda mais bizarros. Por sua vez, o caso de um sólido construído com somente 5 cubos foi ainda mais contundente, pois somente 57% dos licenciandos reconheceram corretamente o desenho, sendo que este é um dos mais frequentes nos livros didáticos brasileiros para os anos escolares iniciais.

As observações da autora na sala de aula e os resultados anteriores, ameadados ao longo dos anos, apontavam que os erros eram devidos a prováveis obstáculos cognitivos originados da não visualização correta dos objetos geométricos espaciais e precisavam ser enfrentados de maneira diferenciada daquela apresentada nas disciplinas cursadas anteriormente com aulas expositivas, nas quais os temas eram tratados somente a partir de desenhos com régua, esquadro e compasso.

A seguir, apresenta-se como, na Licenciatura do IME, obstáculos cognitivos advindos da visualização foram transpostos por meio do conceito de *ludicidade*, em um laboratório, o LEG, no qual se realizaram ações e se desenvolveram práticas com vistas à melhoria do ensino de Geometria, contornando as limitações do ensino expositivo.

A LUDICIDADE: IMPORTÂNCIA E LIMITAÇÕES

Com certeza, a ludicidade é um dos conceitos mais mal compreendidos nos meios da formação do professor de Matemática, pois é muito complexo, polissêmico e depende da área de conhecimento envolvida.

Na área da Educação Matemática, e como a autora a considera, a ludicidade pode ser entendida a partir de dois pontos de vista complementares: o da coletividade e o da subjetividade. Para o primeiro, a ludicidade é formada por atividades prazerosas envolvendo criações culturais, étnicas e atos sociais, oriundos das relações dos indivíduos entre si na sociedade. Do ponto de vista da subjetividade, a ludicidade é caracterizada como um estado de ânimo que expressa um sentimento de entrega, de inteireza, de

vivência plena, em uma circunstância prazerosa da vida e se relaciona com a realidade cognitiva do indivíduo.

A ludicidade, no entanto, nem sempre é bem compreendida no âmbito do sistema educacional, ao ter o seu entendimento limitado a um conjunto de atividades prazerosas motivadoras de ações individuais e coletivas. Tem sido observado que muitas vezes, o professor faz uso de recursos didáticos, como no caso de materiais manipulativos concretos ou virtuais, buscando somente os seus componentes lúdicos, principalmente no caso de jogos voltados para o ensino. Assim, o professor não prioriza os aspectos formadores do conhecimento, em direção à transposição dos obstáculos cognitivos na construção do significado de um conceito matemático nem de sua relação com a abstração. Dessa forma, nem sempre os materiais didáticos são utilizados pelo aluno de maneira plena na busca de descobertas e de uma aprendizagem significativa. Embora as descobertas realizadas pelo aprendiz sejam parte importante do processo de aprendizagem e do entendimento do significado de um conceito, não se constituem no todo do processo mental envolvido. Como será enfatizado a seguir, este processo precisa ser orientado pelo professor por meio de atividades que, respeitando as singularidades do aprendiz, utilizem os recursos didáticos como mediadores na construção do significado matemático.

Nesta direção, a autora, há muito, considerava a possibilidade de se ter, no sistema educacional, um espaço que proporcione maior visibilidade à subjetividade e à singularidade dos atores, que permita a interação nos procedimentos e práticas ali realizadas e que leve ao desenvolvimento pessoal dos aprendizes e do professor na busca do conhecimento científico e social. Um espaço educacional onde a curiosidade é estimulada, e que permite o surgimento do interesse pelo saber científico. Um *locus* onde a ludicidade possa ser explorada de ambas as maneiras, ou seja, ensinar com paixão e sentimento de prazer para produzir atividades, materiais didáticos e ações que reproduzam situações lúdicas, mas que promovam a aprendizagem significativa. No âmbito do sistema educacional, um tal espaço como aqui idealizado seria o de um *Laboratório de Educação Mate-*

mática. Em um curso de licenciatura em Matemática esse tipo de laboratório se constitui, portanto, em um *locus* para a discussão e inovação dos conhecimentos, contribuindo tanto para o desenvolvimento profissional dos futuros professores como para sua iniciação em atividades de pesquisa.

No que se segue, apresentam-se as características do laboratório LEG do IME, para o qual o conceito de “sala ambiente”, como planejado pela professora Moraes, foi uma das inspirações.

O LABORATÓRIO LEG NOS CURSOS DE MATEMÁTICA

Um Laboratório de Educação Matemática (LEM), como considerado pela autora em Kaleff (2023 e 2024), pode ser um local específico da escola ou uma simples sala de aula. Assim, um LEM é um local de realização de práticas didáticas reflexivas, que permitem ao professor analisar e questionar suas próprias ações e decisões pedagógicas, visando à melhoria do ensino de Matemática. Também é um local em que as ações do docente se concentram no desenvolvimento de estratégias e procedimentos didáticos lúdicos e motivadores da ação do aprendiz, e que estão em consonância com as, atualmente denominadas, *metodologias ativas*. Estas priorizam o papel de protagonista do aluno na aprendizagem com o professor levando em conta o desenvolvimento da criatividade do aprendiz, sua efetiva participação em todas as etapas do processo de aprendizagem e, principalmente, o desenvolvimento da cognição por meio de ações lúdicas, empíricas e interativas do aluno com o ambiente físico e social.

O Laboratório de Ensino de Geometria (LEG) da UFF foi concebido como um núcleo de pesquisa, de inovação, de divulgação de recursos didáticos e de metodologias para o ensino e a aprendizagem das Geometrias (Euclidiana e não Euclidianas), porém sempre apresentou características singulares que iam além das de um LEM e de uma sala ambiente.

No LEG, estava-se tanto na busca do entendimento das interações entre os atores educacionais envolvidos no incentivo do “manipular consciente” (inspirado em Steiner) de recursos didáticos artesanais, quanto na busca pela matéria-prima sustentável e de baixo custo para a construção

manual e artesanal destes recursos. Por estas razões, sob a coordenação da autora de 1994 a 2018, o laboratório sempre teve a característica do que, atualmente, é chamado de *laboratório maker sustentável*, como apresentado em Kaleff (2024). Um espaço em que se buscava, por meio da ludicidade, levar o licenciando à autonomia na vida profissional, à reflexão crítica sobre a manipulação dos recursos didáticos para o entendimento significativo dos conteúdos matemáticos, principalmente os geométricos, e à conscientização das interrelações entre aluno e professor.

Como mencionado em Kaleff; Batista e Rosa (2025), em uma sala de aula ou laboratório como o LEG, pode-se representar e modelar um objeto matemático de muitas maneiras, por meio de recursos didáticos manipulativos concretos ou virtuais. Estes são muito importantes, pois podem ser considerados como uma *ferramenta de mediação semiótica* quando usados pelo docente “para intervir intencionalmente na aprendizagem da representação de um conteúdo matemático, por meio de símbolos e sinais” (p. 229). Eles potencializam o entendimento do significado matemático e o desenvolvimento cognitivo da habilidade da visualização do aprendiz, na interação com as representações e seus registros semióticos. Assim, a manipulação e a observação do recurso possibilitam o desenvolvimento da habilidade de se perceber mentalmente (visualizar) o objeto matemático em estudo e de diferenciá-lo de suas representações e registros. Por outro lado, o bom e adequado recurso didático manipulativo, como apresentado em Kaleff (2023; p. 61) e compreendido como uma ferramenta de mediação semiótica, permite ao professor entender melhor os prováveis obstáculos cognitivos apresentados pelos alunos e a criar atividades que levem o aprendiz a ultrapassá-los.

Pelo apresentado, a autora constatou, no LEG, que o obstáculo cognitivo anteriormente relatado, sobre o plano que passa por quatro pontos médios das arestas de um tetraedro regular, pode ser ultrapassado pela observação das sombras, sobre uma parede plana, obtidas pela projeção de um feixe de luz (como o emitido pela lanterna de um celular) sobre um modelo do esqueleto das arestas do tetraedro com as do octaedro inscrito,

construído com canudos de plástico, como pode ser visto em Kaleff (2023, p. 285 - 289). Também ali, se mostra que os obstáculos cognitivos relativos ao reconhecimento de desenhos de sólidos espaciais podem ser ultrapassados pelas práticas envolvendo construções com quebra-cabeças 3D e modelos de esqueletos das arestas de sólidos ((p. 289-334).

É interessante enfatizar que, no caso da definição de um conceito, por exemplo, são as atividades e os procedimentos empíricos que possibilitam o desenvolvimento da visualização deste conceito. Estas ações são fundamentais para que o aprendiz analise o conjunto das características pertinentes ao conceito e a organizá-las mentalmente para poder entender a definição matemática. Partindo da manipulação de recursos didáticos concretos ou virtuais e da observação de algumas de suas representações gráficas, o professor pode direcionar o aluno a desenvolver um procedimento empírico de ações em uma sequência de atividades do tipo “tentativa e erro” para a obtenção do conjunto das características pertinentes ao conceito. Tal procedimento auxilia o aprendiz a organizar seus pensamentos, a descobrir e a obter a “sua” versão da definição. Ainda que, muitas vezes, tal versão individualizada apresente incorreções e seja incompleta do ponto de vista padrão teórico matemático, ela facilita a compreensão da definição matemática. Esta deve ser apresentada pelo docente ao final do procedimento empírico realizado pelo aluno.

No LEG foi criada, artesanalmente, uma vasta coleção de recursos didáticos, apresentada em Kaleff (2023), constituída por: diferentes tipos de quebra-cabeças planos e espaciais; um conjunto de ábacos de 5 tipos diferentes; modelos de sólidos diversos incluindo os de esqueletos de arestas; modelos de superfícies regradas etc. Todavia, foram procedimentos empíricos, realizados com estes recursos de mediação semiótica, que levaram, muitas vezes, a autora a ouvir frases do tipo: “só consegui resolver a prova de Cálculo porque lembrei do hiperboloide que vi em uma exposição do LEG”; “depois de mexer nos cubinhos e ver os desenhos é que entendi”; “só entendi as relações entre os volumes mexendo com os quebra-cabeças”. Estas frases sempre indicaram que a utilização dos materiais didáti-

cos potencializava, através da visualização, a desconstrução do obstáculo cognitivo e o entendimento do significado dos conceitos, tão necessário à abstração matemática.

Pelo que foi constatado pela autora, portanto, os procedimentos empíricos realizados no LEG complementavam o que tanto faltava, nas disciplinas básicas, aos alunos da Licenciatura da UFF, ao permitir que saíssem da contemplação passiva para a ação e ultrapassassem o desalento e o desencanto por um ensino que desconsiderava suas singularidades e os obstáculos cognitivos que enfrentavam, e que não os incentivava a descobrir as próprias potencialidades.

O LEG foi se constituindo em um espaço de aprendizagem e pesquisa para o licenciando e para professores em formação continuada, no qual, a partir de 1998, eram desenvolvidas várias ações pedagógicas da Licenciatura em duas disciplinas obrigatórias: *Laboratório de Educação Matemática e Educação Matemática-Geometria*, bem como em cursos de extensão para a melhoria do ensino de Geometria para professores.

Cabe enfatizar que a criação e a elaboração do recurso didático artesanal com matéria-prima de baixo custo, pelo licenciando ou professor em exercício, o levavam a tomar consciência de três de suas dificuldades. A primeira acontecia na criação do recurso, pois este deveria ser diferente daqueles encontrados nos ambientes virtuais ou no comércio, tais como: blocos lógicos, régua *cuisinaire*, geoplanos etc. A segunda era relacionada à coordenação motora necessária para a confecção artesanal do recurso, pois, geralmente, estes adultos apresentavam inabilidade para o manejo de pequenas ferramentas manuais como serras, tesouras, cortadores diversos etc. A terceira se encontrava na elaboração das atividades orientadoras para o futuro aluno, usuário do recurso, pois estas atividades deveriam transformar este recurso em uma efetiva ferramenta de mediação semiótica.

De forma resumida, as ações educacionais, no LEG, visavam levar o licenciando ou o graduado a ultrapassar suas próprias dificuldades, seus obstáculos cognitivos e atingir o “manipular consciente” como recurso di-

dático artesanal para chegar ao “significado matemático”. Esse processo envolvia ações conscientes, preconizadas por Steiner, e práticas do “fazer com as mãos”. Ou seja, práticas relacionadas ao *hands on*, advindas das pesquisas educacionais americanas e inglesas (segundo os Standards e precursoras da denominação *maker*), bem como ações de mão na massa, *la main à la pâte*, segundo pesquisadores franceses (como na TRS).

Por outro lado, cabe enfatizar que as ações no LEG visavam à autonomia profissional na “formação pela ação”, sempre tendo em vista complementar as demandas da comunidade escolar dentro e fora dos muros da Universidade. Assim, além dos licenciandos participantes das disciplinas citadas, também outros participavam das atividades do Laboratório, seja mediante bolsa de monitoria, de extensão, ou de iniciação à docência, seja como voluntários que buscavam o enriquecimento de sua formação docente. O LEG aglutinava também docentes dos vários departamentos do IME simpatizantes da área de Educação Matemática e professores de Matemática, que atuavam em escolas de Ensino Fundamental e Médio. De que maneira o LEG ia além dos muros da UFF e seus recursos se tornaram equitativos e inclusivos, é o que se relata a seguir.

O Museu LEGi e a Educação Inclusiva

Desde sua fundação, as ações do Laboratório também se voltavam à formação e à democratização do conhecimento criado na Universidade por meio da itinerância do acervo, o *Museu LEGi*, constituído pelos materiais didáticos manipulativos interativos criados no Laboratório e apresentados em exposições públicas e em eventos educacionais. Em 2005, por convite do professor Costa, o Museu se transformou efetivamente em itinerante ao ser integrado às ações de ensino a distância dos Cursos da UFF ligados à Universidade Aberta do Brasil, que estavam sob a direção deste professor.

Por outro lado, considerando que, há tanto tempo, a autora já vinha se preocupando, no ensino de Geometria, com a visualização e com a formação de imagens mentais pelas pessoas com visão normal, nada mais

coerente do que se pensar em uma vertente de pesquisa que envolvesse estes temas para indivíduos com deficiência visual, ou seja, cegos ou com baixa visão.

Assim, a partir de 2008, foram iniciados estudos sobre como se criar recursos equitativos e melhor realizar a adaptação dos materiais manipulativos concretos e virtuais existentes no LEG, para se tornarem táteis e poderem ser utilizados no âmbito da Educação Matemática Inclusiva de alunos com deficiência visual. Para tanto, o acervo didático de recursos do LEG destinado às pessoas videntes, aquelas consideradas com visão normal, também teve que ser reconfigurado para se tornar inclusivo, com as cores substituídas por matérias-primas providas de diferentes espessuras e texturas. Também os Cadernos de Atividades, contendo a descrição e as orientações das atividades correspondentes a cada recurso manipulativo, foram reestruturados, com desenhos táteis em alto relevo, e reimpressos com fonte em tamanho grande, para pessoas videntes ou com baixa visão, além de terem a sua transcrição impressa em Braille, destinada aos cegos.

Tais recursos inclusivos foram aplicados a alunos e professores (cegos e com deficiência) do Ensino Fundamental do Instituto Benjamin Constant (IBC), escola especializada nesta deficiência. A partir de 2012, estes recursos foram aplicados a alunos do Ensino Médio das classes regulares do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro e em Niterói. Este colégio é uma escola inclusiva que recebe os alunos advindos do IBC.

Por sua vez, o acervo do Museu LEGi também foi, com o passar dos anos, se tornando inclusivo, transformando-se em *Museu Interativo Itinerante Inclusivo de Educação Matemática*. Por ocasião da aposentadoria da autora, em 2018, o acervo do LEG contava com cerca de 60 recursos didáticos artesanais inclusivos que podem ser conferidos em Kaleff (2023 e 2016c), e com uma pequena biblioteca de livros infantis táteis, além de centenas de livros e periódicos nacionais sobre História da Matemática, Etnomatemática, didática, ensino de Geometria etc.

Além disso, visando atender à legislação vigente relativa à Inclusão, foram incluídos, na ementa da disciplina obrigatória *Laboratório de Edu-*

cação Matemática, de responsabilidade do Departamento de Geometria, tópicos que orientam o licenciando sobre a Educação Inclusiva e o ensino de Geometria.

UM LEGADO PARA A CONTINUIDADE ...

Na narrativa que agora se finda, a autora buscou mostrar como, ao longo da história da Licenciatura da UFF, se constituiu uma sala ambiente, na qual o encantamento pela Geometria e pelo seu ensino foi sendo resgatado. Local em que, ao se construir recursos didáticos artesanais de baixo custo, podia-se incentivar o licenciando a desenvolver atividades que o preparavam para levar o seu futuro aluno, a partir da observação concreta de modelos e representações matemáticas, ao significado e à abstração dos conceitos, de uma maneira lúdica e prazerosa, sem deixar de lado os preceitos matemáticos. Um local em que a ação de se “Ensinar Geometria” foi se transformando em “Educar pela Geometria”, onde o “Ensinar Matemática” aos poucos se transformou em “Educar pela Matemática”, a todos, independentemente das singularidades dos aprendizes.

Em Kaleff (2007, 2010, 2012, 2016a, 2016b, 2016c, 2022, 2023, 2024), a autora apresenta as teorias que fundamentam as considerações anteriores e desenvolve exemplos de atividades com a aplicação dos recursos didáticos manipulativos que funcionam como ferramentas de mediação semiótica. Também mostra como tudo isso pode ser realizado em uma simples sala de aula, transformando-a em um laboratório de liberdade de ação do aluno e do professor, onde descobertas permitem que se ultrapasse as singularidades do aprendiz, tirando-o do desânimo frente às ações educacionais, levando-o a assumir atitudes ativas com vistas ao progresso nas atividades matemáticas, evitando o fracasso escolar e a consequente evasão.

A autora espera que, com a narrativa apresentada, tenha resgatado o nome da professora Ceres Marques de Moraes e o seu legado educacional, trazendo-os ao lugar que merecem na história dos Cursos de Matemática da UFF.

A autora também almeja que os seus textos aqui referenciados possam entusiasmar outros professores a dar continuidade ao que foi realizado e a criar novas situações didáticas com vistas à melhoria do ensino de Matemática, principalmente de Geometria.

REFERÊNCIAS

- Barbosa, J. E. F. (1970). *Sobre as sistematizações universais*. Instituto de Matemática–UFF.
- Barbosa, J. E. F. (1971). *Sobre uma hierarquia transfinita de caliortografias e morfologias universais*. Instituto de Matemática – UFF.
- Brasil. (1961). *Lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961: Fixa as diretrizes e bases da educação nacional*. Diário Oficial da União. http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l4024.html
- Brasil. (1968). *Lei nº 5.540, de 28 de novembro de 1968: Fixa normas de organização e funcionamento do ensino superior*. Diário Oficial da União. <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/lei/1960-1969/lei-5540-28-novembro-1968-359201-publicacaooriginal-1-pl.html>
- Brasil. (1971). *Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971: Fixa diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus*. Diário Oficial da União. <http://www010.dataprev.gov.br/sislex/paginas/42/1971/5692.htm>
- Brasil. Ministério da Educação. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª séries)*. MEC/SEF.
- Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Hermann.
- Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Hermann.
- Dieudonné, J. (1990). *A formação da matemática contemporânea*. Dom Quixote.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137–165.
- Kaleff, A. M. M. R (1972) *Valorizações de Lebesgue em Reticulados*. Monografia (Mestrado em Matemática, UFF). 1972. Niterói, RJ. 1972.

Kaleff, A. M. M. R. (1990). Matemática moderna: Sua origem e aspectos de seu desenvolvimento em alguns países ocidentais. *Boletim GEPEM*, 25, 3–9.

Kaleff, A. M. M. R. (2001). A Educação Matemática na Universidade Federal Fluminense: Um relato do desenvolvimento histórico dos cursos de formação de professores de Matemática. *Boletim GEPEM*, 38, 9–33.

Kaleff, A. M. M. R. (2007). Registros semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às geometrias não euclidianas. *Bolema*, 28, 69–94.

Kaleff, A. M. M. R. (2010). Do fazer concreto ao desenho em geometria: Ações e atividades desenvolvidas no Laboratório de Ensino de Geometria da UFF. In: Lorenzato, S. (Org.). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. 3 ed., 113–134. Autores Associados.

Kaleff, A. M. M. R. (2012). Dois desafios para o ensino de geometria e para a inclusão do deficiente visual na escola: Visualização e interpretação de figuras geométricas. *Educação Matemática em Foco*, 1, 34–55.

Kaleff, A. M. M. R. (2016 a). *Memórias de uma trajetória acadêmica de perseverança: vivências de uma Educadora Matemática em um Curso de Formação de Professores de Matemática*. CEAD. https://www.sbemrasil.org.br/files/livro_ana.pdf.

Kaleff, A. M. M. R. (2016 b). *Tópicos em Ensino de Geometria: a sala de aula frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria*. 2. ed. CEAD. https://www.researchgate.net/publication/372743909_Topicos_em_Ensino_de_Geometria_a_sala_de_aula_frente_ao_Laboratorio_de_Ensino_e_a_Historia_da_Geometria

Kaleff, A. M. M. R. (2016 c). *Vendo com as mãos, olhos e mente: recursos didáticos para laboratório e museu de Educação Matemática Inclusiva do aluno com deficiência visual*. CEAD. https://www.researchgate.net/publication/372744160_VENDO_COM_AS_MAOS_OLHOS_E_MENTE

Kaleff, A. M. M. R. (2022). Obstáculos cognitivos e registros semióticos frente à habilidade da visualização na aprendizagem das Geometrias Euclidiana e não Euclidianas. In: Bairral, M; Oliveira, G. W. B. & Izar, S. B. (Orgs). *Retratos de Experiências para visualização em Geometria*. 12-22. Edur/UFRRJ.

Kaleff, A. M. M. R. (2023). *Recursos didáticos em Educação Matemática: um repositório comentado*. Conversas com quem ensina, v. 3. Meus Ritmos. https://www.researchgate.net/publication/372743953_Recursos_didaticos_em_Educacao_Matematica_um_repositorio_comentado.

Kaleff, A. M. M. R (2024). Conversando sobre Laboratórios para o ensino e aprendizagem de Matemática. *Revista FEMASS*. 8. 02-25.

Kaleff, A. M. M. R. & Rosa, F. M. C. (2014). Observações preliminares sobre o percurso histórico da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Fluminense: da lógica matemática ao cálculo e à educação matemática inclusiva. II ENAPHEM. ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 2. Bauru/SP. *Anais [...]* Bauru: UNESP, 2014, 156-165.

Kaleff, A. M. M. R.; Batista, E, S. C. & Rosa, F. M. C. (2025). O laboratório *maker* sustentável inclusivo na formação do professor que ensina matemática. In: Manrique, A. L., Viana, E. A. (Orgs). *Formação de professores com uma perspectiva inclusiva*. 221-248. LF Editorial.

Kaleff, A. M. M. R; Figueiredo, L. G; Henriques, A. & Rei, D. M. (1994). Desenvolvimento do pensamento geométrico: Modelo de van Hiele. *Bolema*. Rio Claro-SP: UNESP. 10. 21-30.

Lanz, R. (1979) *A Pedagogia Waldorf: caminho para um ensino mais humano*. Antroposófica.

Ledergerber-Ruoff, E. B. (1982). *Isometrias e ornamentos no plano euclidiano*. Atual/USP.

Moraes, C. M; Souza, J. C. M. & Bezerra, M. J. (1958). *Didática Especial da Matemática*. (3 ed.). CADES/MEC.

Paiva, M. A. V. (1999). *Concepções do Ensino de Geometria: um estudo a partir da prática docente*. Tese (Doutorado em Matemática-PUC). Rio de Janeiro.

Papy, G. & Papy, F. (1970). *Mathématique Moderne*. Marcel Didier.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of Mathematics Education*. Academic Press.

CAPÍTULO 3

Rastros que revelam pensamentos: telagrafações e significação em ambientes de geometria dinâmica

Alexandre Rodrigues de Assis
Marcelo Almeida Bairral

Resumo: O capítulo convida o leitor a adentrar nos bastidores da aprendizagem geométrica em ambientes digitais, acompanhando como signos se constroem em movimento. Ancorado na perspectiva histórico-cultural e na mediação semiótica, o estudo articula *Design Experiment* e cognição corporificada. O experimento de ensino foi realizado com estudantes do 1º ano do Ensino Médio em formação de professores da rede pública, utilizando GeoGebra em tablets. As telagrafações registraram toques, rastros e falas, possibilitando análises refinadas de interações. Os resultados indicam que a telagrafação subsidia ciclos de (re)*design* ao revelar estratégias emergentes com toques e rastros, orientando o refinamento da tarefa.

Palavras-chave: Telagrafação. Mediação semiótica. Design de tarefas.

Resumen: El capítulo invita al lector a adentrarse en los entresijos del aprendizaje geométrico en entornos digitales, acompañando cómo se construyen los signos en movimiento. Anclado en la perspectiva histórico-cultural y en la mediación semiótica, el estudio articula Diseño Experimental y cognición incorporada. El experimento de enseñanza se realizó con estudiantes del primer año de Educación Secundaria en formación de docentes de la red pública, utilizando GeoGebra en tabletas. Las pantallagrabaciones registraron toques, rastros y palabras, posibilitando análisis refinados de las interacciones. Los resultados subrayan que la pantallagrabación subsidia ciclos de (re)diseño al revelar estrategias emergentes con toques y rastros, orientando el perfeccionamiento de la tarea.

Palabras-clave: Pantallagrabación. Mediación semiótica. Diseño de tareas.

INTRODUÇÃO

A expansão das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) vem promovendo transformações significativas na Educação Matemática, especialmente na forma como professores e estudantes interagem com os conceitos geométricos. No contexto contemporâneo, o acesso ampliado a dispositivos móveis, como tablets e smartphones, tem possibilitado a integração de ambientes digitais de aprendizagem que potencializam novas práticas pedagógicas e investigativas. Entre esses ambientes, destacam-se os de Geometria Dinâmica, que permitem a construção e manipulação de objetos matemáticos e possibilitam a elaboração de relações visuais, gestuais e simbólicas em tempo real, favorecendo a experimentação e a construção compartilhada de significados matemáticos.

Essa expansão tecnológica não se resume à inserção de novos artefatos em sala de aula, mas implica repensar as formas de mediação e de representação do conhecimento. Nas últimas décadas, a pesquisa em Educação Matemática tem evidenciado a importância das mediações semióticas — compreendidas como processos de significação mediados por artefatos, gestos e signos — na aprendizagem de conteúdos geométricos (Bartolini Bussi; Mariotti, 2008; Radford, 2014). Quando essas mediações se articulam ao design de tarefas, concebido como o planejamento intencional de situações que estimulam a investigação e o raciocínio matemático (Cobb *et al.*, 2003), abrem-se possibilidades para compreender como os estudantes constroem significados por meio da ação e da reflexão sobre suas próprias produções.

A presença de dispositivos móveis nos contextos educacionais amplia ainda mais essas possibilidades. Tablets e smartphones, aliados a *softwares* como *GeoGebra* ou *Sketchometry*, permitem que os aprendizes interajam de modo direto com figuras e construções geométricas, promovendo experiências cognitivas e corporificadas. A incorporação de registros multimodais, como telagravações (TG) (gravações de tela que registram as ações dos estudantes durante a resolução das tarefas) e Folhas de Ícones (Assis,

2020) – instrumentos gráficos para anotar gestos e interações –, emerge como uma estratégia metodológica na coleta e análise de dados. Esses registros oferecem ao pesquisador e ao professor indícios ricos de como os processos de mediação e significação se constituem no movimento entre o gesto, o olhar, o discurso e a ação sobre o artefato.

Diante desse cenário, o presente estudo busca responder à seguinte questão: Como a Telagravação (TG) pode contribuir para a compreensão do processo de construção de significados geométricos em ambientes? A proposta é compartilhar uma análise de um processo de mediação semiótica em tarefas de geometria desenvolvidas em ambiente digital, adotando como base teórica os estudos de Bartolini Bussi e Mariotti (2008) sobre mediação semiótica e de Cobb *et al.* (2003) sobre o *design experiment* e o papel das tarefas no desenvolvimento da aprendizagem matemática.

A relevância deste capítulo se sustenta em três dimensões complementares. Teoricamente, contribui para o aprofundamento das discussões sobre a mediação semiótica na Educação Matemática, dialogando com as contribuições de Bartolini Bussi e Mariotti (2008) e Radford (2014) acerca dos processos de significação mediados por tecnologias digitais. Metodologicamente, propõe a utilização de registros multimodais como instrumento de análise qualitativa em ambientes digitais, ampliando as possibilidades de observação e interpretação dos processos de aprendizagem. Socialmente, a pesquisa oferece subsídios para a formação docente, ao destacar práticas investigativas que articulam o uso pedagógico das tecnologias digitais à construção coletiva do conhecimento matemático.

SIGNOS EM MOVIMENTO

A significação é um processo essencialmente humano e social, constituído nas relações que o sujeito estabelece com o mundo, com os outros e com os artefatos culturais. À luz da perspectiva histórico-cultural, esse processo não é apenas individual, mas resultado da atividade mediada por signos que emergem da interação. Vigotski, ao compreender o desenvolvimento humano como um fenômeno cultural, enfatiza que é pela lingua-

gem, pelos gestos e pelos instrumentos simbólicos que o homem organiza sua experiência e transforma sua própria mente. Pino (2004) aprofunda essa concepção ao destacar que a cultura é o que torna o homem humano, pois é nela que se originam os sistemas simbólicos que regulam o comportamento e produzem sentido. Gestos e toque em telas, nesse contexto, não são apenas expressões corporais, mas uma forma de pensamento em ação, um signo que, ao ser produzido e interpretado no contexto social, materializa e compartilha significados.

Em Pino (1995), esse processo é descrito como uma atividade que permite a descoberta e a organização do pensamento. Ao discutir a técnica e a semiótica na era da informática, Pino (2003) aponta que as tecnologias ampliam as possibilidades de semiose, estendendo a ação simbólica humana para novos domínios de representação e pensamento. Assim, o signo, em sua essência, é uma ponte entre o real e o possível, um meio pelo qual o ser humano projeta, transforma e compreende o mundo.

A partir de uma compreensão mais ampla do funcionamento sígnico, Arzarello (2006) propõe que os processos de aprendizagem, especialmente os relacionados à matemática, são intrinsecamente multimodais. Ele introduz o conceito de pacote semiótico (*semiotic bundle*), que reúne fala, gesto, escrita e outros modos de expressão em um sistema integrado de comunicação. Nesse sentido, a semiose se realiza de forma simultânea e coordenada entre diferentes modalidades, cada uma contribuindo para a construção e apropriação de significados. O gesto e toque em telas, portanto, ganham um papel central na cognição corporificada, que possibilita estruturar pensamentos.

Mariotti (2009), ao dialogar com essa perspectiva, descreve o gesto como um recurso semiótico fundamental para a mediação entre o sujeito e o artefato. Ele argumenta que, ao agir sobre o artefato e explicitar suas ações por meio de gestos e palavras, o sujeito externaliza e negocia significados, transformando experiências individuais em significados compartilháveis. Dessa maneira, o gesto é parte integrante da construção conceitual, especialmente em ambientes de aprendizagem baseados em atividades

práticas e experimentais, como o uso de *softwares* de geometria dinâmica ou materiais manipulativos.

O interacionismo simbólico contribui para ampliar essa discussão ao compreender o significado como produto da interação social. Segundo essa perspectiva, os indivíduos agem em função dos significados que atribuem às situações, e tais significados são construídos e transformados no processo de comunicação. Assim, o gesto, a fala, o toque nas telas, escritas e as expressões corporais são elementos simbólicos que, em interação, moldam o sentido das ações humanas (Carvalho; Borges, Rêgo, 2010). Essa visão converge com a de Pino (2004), ao reconhecer que os signos são mediadores das relações sociais e instrumentos da construção do pensamento.

Desse modo, o processo de significação assume que o gesto e toques em telas atuam como uma forma de linguagem e de pensamento, e a interação social como o espaço de produção e negociação de sentidos. A compreensão dessa dinâmica amplia as possibilidades de análise das práticas educativas, pois evidencia que aprender não é apenas internalizar conteúdos, mas participar de um processo coletivo de construção de significados que se expressam por meio de múltiplas modalidades de comunicação.

TELAGRAVAÇÕES – REVELANDO OS BASTIDORES

O processo dinâmico possibilitado por uma Pesquisa de *Design* (Cobb *et al.*, 2003) e a necessidade de um grande exercício de revisitação aos dados coletados e uma análise retrospectiva, para elaborações de assertivas acerca de raciocínios dos discentes, associados aos toques em telas, a gravação em vídeo gerado por uma câmera direcionada para a superfície do *tablet*, em alguns momentos, impossibilitou o progresso da investigação do experimento. Com o propósito de apoiar as análises retrospectivas, para documentar todo o processo de interação, dando ênfase para toques em telas, destacamos o que denominamos, em investigações no cerne do GEPETICEM, de telagravações (Assis, Henrique, Bairral, 2020). Denominamos telagravação o recurso de gravação do áudio – ima-

gens – toques – rastros sincronicamente a partir do próprio *smartphone* e/ou *tablets* utilizados em implementações, com o auxílio de recursos de gravação de telas, disponibilizados nos *tablets* (Assis, Bairral, 2022).

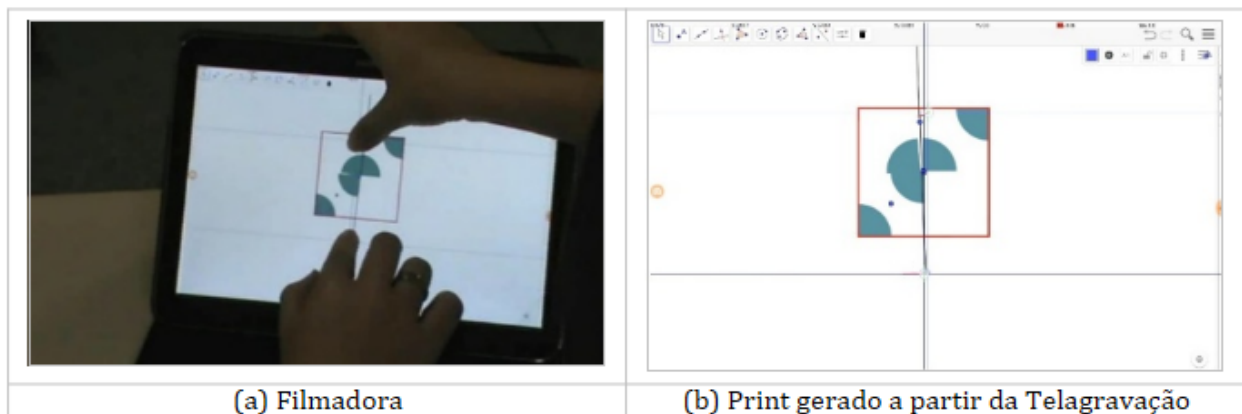
Dados capturados por uma filmadora nos fornecem elementos importantes para analisar situações de aprendizagem, como interações entre discentes ou discente e o dispositivo, além de gestos e falas, por exemplo. No entanto, nem sempre o áudio capturado pela filmadora é de boa qualidade.

A telagravação surge a partir do momento no qual, ao realizar gravações com a filmadora, tornou-se dificultoso identificar se o discente efetuou o toque na tela do *tablet* ou não, ou a quantidade de dedos em contato com a tela para deslocar uma determinada construção. Não é tutelar esse ou aquele recurso, mas é a defesa de uma conjunção de recursos para refinar as análises. A TG, a gravação em vídeo, os registros escritos etc. dispostos em uma linha do tempo auxiliam na análise pormenorizada de um processo interativo rico no fluído da mediação semiótica (Assis, Bairral, 2022).

Dois elementos agregadores são o toque na tela e o seu rastro produzido. A possibilidade de gravar toques e rastros pode contribuir para identificar a elaboração de algumas estratégias e indícios de processo cognitivo empregado na realização da tarefa. As funções “mostrar toques” e “mostrar toque do ponteiro” são habilitadas nas configurações do dispositivo (*smartphone/tablet*).

A sinalização de toque na tela e o rastro do movimento realizado associado às telagravações - a gravação dos bastidores - é possível diferenciar o toque em tela de um gesto dêitico (McNeill; 2002), por exemplo.

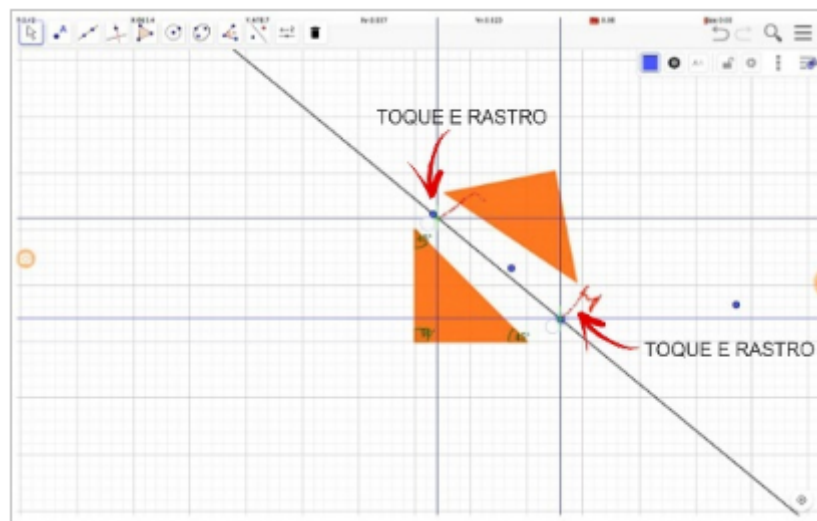
Figura 1 – Captura de telas



Fonte: elaborado pelos autores.

A figura 1 (a), em alguns momentos, pode sugerir que a discente realizou um gesto de apontar determinada parte inferior da área de manipulação do *tablet*, no entanto, ao confrontar com a gravação realizada com aplicativo, é possível identificar dois toques nas telas, momento no qual as discentes manipulam juntas a mesma construção, o que só é possível identificar essa manipulação conjunta com a gravação a partir da filmadora.

Figura 2 – Indicação de rastros de toque em telas



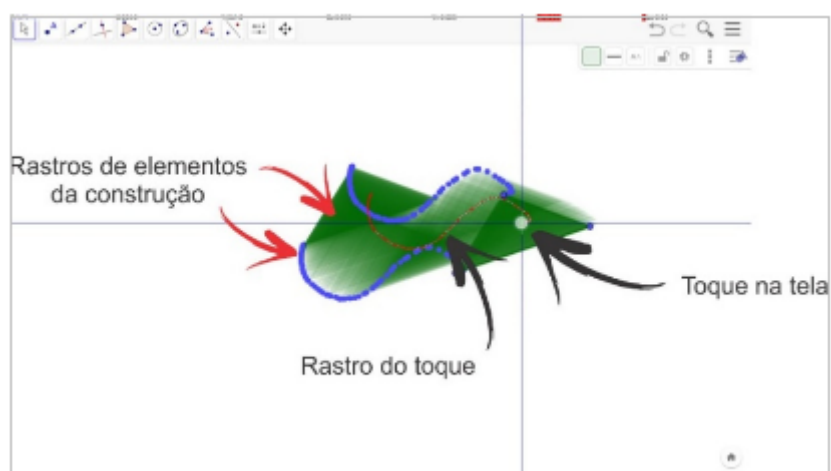
Fonte: elaborado pelos autores.

Ao habilitar a opção “Mostrar local do ponteiro”, é possível identificar o caminho – o que chamaremos de rastro – realizado durante um determinado movimento. O rastro registrado na tela é indicado por uma combinação de pontos vermelhos e azuis. Trabalhos realizados por Arza-

rello *et al.* (2002), Bartolini Bussi e Mariotti (2008) e Baccaglini-Frank e Sinclair (2017) possibilitaram habilitar a função que indica o rastro de elementos da construção realizado no Cabri, também possível de se obter no GeoGebra. O que diferencia o recurso destes programas de geometria dinâmica para o habilitado diretamente no dispositivo é que o rastro registrado na tela não garante que seja o rastro do toque realizado na tela, ao se deslocar uma construção.

Em uma construção realizada no GeoGebra, foi habilitado o rastro de dois vértices e da região interna do triângulo. Ao realizar o deslocamento, após selecionar o triângulo, podemos observar o indicativo de duas linhas pontilhadas em azul com maior destaque (deslocamentos dos vértices), região na cor verde (deslocamento da região interna e lados do triângulo) e – e um ponto branco sobre o triângulo (indicado o toque) e seu rastro indicado pela linha pontilhada vermelha.

Figura 3 – Rastros e toque



Fonte: dados da pesquisa.

Dados gerados a partir de fontes distintas em ambientes de aprendizagem, podem auxiliar na análise sobre possíveis regularidades, identificando processos relacionais interdependentes que ocorrem entre particularidades e generalidades para constituição de uma proposta didática, o que não significa que mesmo tendo produzido arquétipos válidos para um determinado contexto, se dará da mesma maneira em um contexto distinto, assim sendo, não anulamos a possibilidade de

que o material possa ser adaptado segundo às especificidades de uma determinada circunstância.

Não é nossa pretensão provar a aplicabilidade ou fraquezas de uma estipulada teoria. Entendemos que experimentos de ensino, realizados em contextos reais, são permeados de enredamento e limitações. Isto posto, o processo de redesenho e refinamento das tarefas é dinâmico e quase sempre não perfaz a imprevisibilidade que surge em implementações, dessa forma, a efetivação de ajustes e experimentos se faz necessária (Cobb *et al.*, 2003).

As TG, nesse contexto, constituem-se como mais uma forma de obter dados com os quais objetivamos substanciar reflexões acerca do processo de elaboração e apropriação de significados. O toque na tela, arrastos e giros realizados, a captura da entonação da fala, são exemplos de elementos que podem oferecer pistas sobre a subjacente capacidade de observar e analisar possíveis padrões de resolução de problemas. É próprio ressaltar que tal procedimento não se caracteriza como algo prescritivo. Não significa que tal processo para a elaboração de uma determinada tarefa seja comum aos pares, mas pode contribuir para customização da tarefa, seja agregando maior aprofundamento, utilização de novos recursos ou redesenhando a tarefa com outro *software*, por exemplo.

ALGUNS CAMINHOS METODOLÓGICOS

O estudo foi conduzido in loco com estudantes do 1º ano do Ensino Médio em um curso de Formação de Professores, do Instituto de Educação Rangel Pestana (SEEDUC/RJ) em parceria com o Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM¹) com foco em compreender como toques em tela e manipulações com a tela ou a partir dela contribuem para o aprendizado de isometrias no GeoGebra. A coleta de dados incluiu telagravações (registros que capturam toques, rastros, gestos e áudio) além de anotações do pesquisador, produções dos alunos, gravações em vídeo e

¹ <https://www.gepeticem.ufrj.br/>

uma folha de ícones (Assis, 2020) que auxiliou na identificação das ações realizadas na tela.

A pesquisa adota a metodologia de *Design Experiment* (DE) (Cobb *et al.*, 2003), entendida como uma abordagem investigativa que articula, de forma cíclica, planejamento, implementação, análise e refinamento contínuo das tarefas. Essa metodologia permite acompanhar processos de aprendizagem em ambientes reais, ao mesmo tempo em que possibilita ajustar o design das atividades à medida que evidências emergem das interações dos estudantes. Em contextos mediados por tecnologias digitais, como tablets e softwares de geometria dinâmica, o DE mostra-se especialmente adequado, pois reconhece a imprevisibilidade e a riqueza das interações que se produzem nesses ambientes.

O DE orientou a elaboração e o desenvolvimento das tarefas em implementações sucessivas. Cada implementação gerou dados que retroalimentaram o processo, permitindo reorganizar instruções, ajustar a sequência de atividades e modificar elementos do design, conforme sugerem Cobb, Zhao e Dean (2009) ao defenderem a importância do “refinamento progressivo” na pesquisa baseada em design. Tarefas como Deslocando o Polígono, Estrela e Placa de Cerâmica (Assis, 2020), construídas no GeoGebra e implementadas em *tablets*, foram reconfiguradas após análises preliminares, tornando-se mais responsivas às estratégias emergentes dos estudantes. Essa flexibilidade do design é característica essencial do DE, que opera em um movimento constante entre conjecturas teóricas e práticas observadas.

A análise foi guiada pela ideia de que o conhecimento se constrói em uma ecologia de aprendizagem (Downing-Wilson; Lecusay; Cole, 2011), na qual tarefas, artefatos digitais, gestos, falas e ações corporificadas se entrelaçam. Nesse sentido, toques e arrastos na tela são compreendidos como mediadores semióticos, capazes de revelar modos de pensar, explorar e validar ideias matemáticas. Essa perspectiva articula mediação semiótica, cognição corporificada e elementos da teoria histórico-cultural, reconhecendo que o gesto e a ação no touchscreen não apenas acompanham o raciocínio, mas participam ativamente da produção de significados.

O processo analítico valorizou tanto a observação de episódios pontuais — como a estratégia adotada para deslocar um polígono — quanto a evolução das práticas matemáticas da turma, conforme orienta Cobb *et al.* (2001). Essa dupla atenção permitiu acompanhar como certos modos de argumentar, justificar e manipular objetos digitais se tornaram compartilhados ao longo das atividades, influenciando a aprendizagem coletiva.

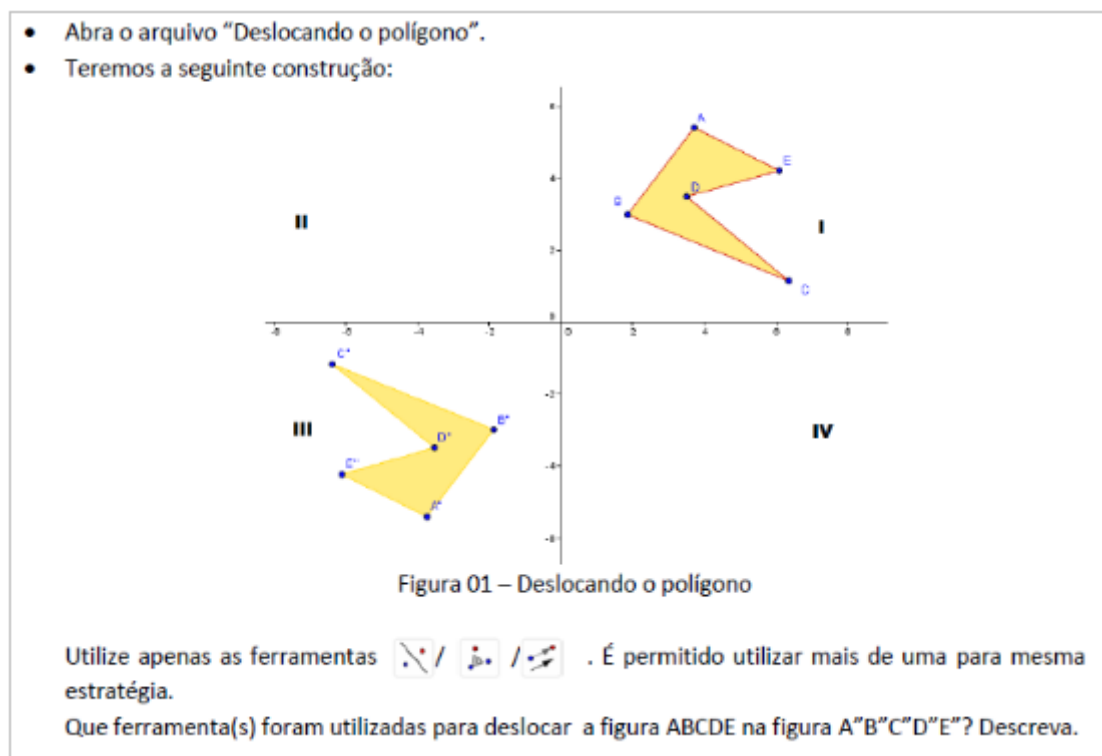
Assim, o experimento de ensino, ao sustentar ciclos contínuos de análise e (re)design, possibilitou compreender como as ações touchscreen funcionam como elementos constitutivos do aprender matemática. Ao mesmo tempo, contribuiu para aperfeiçoar as tarefas, tornando-as mais eficazes na promoção da construção conceitual que se buscava investigar.

RASTROS E DESCOBERTAS NA CONSTRUÇÃO COMPARTILHADA

Neste momento, a Tarefa 5 será o recorte, cujo objetivo foi realizar o deslocamento de um polígono, segundo as posições indicadas na Folha de tarefas ilustrada com o *print* da construção na tela.

A composição da tela inicial de trabalho foi construída previamente pelo pesquisador e salva em todos os *tablets*, de modo que o discente tivesse acesso à construção e possibilidade de salvar a construção final. Em sua primeira versão (Figura 4), a tarefa “Deslocando polígono”, uma figura estava situada no primeiro quadrante (posição inicial) e outra no terceiro quadrante (posição final).

Figura 4 – 1ª Versão da tarefa “Deslocando o polígono”



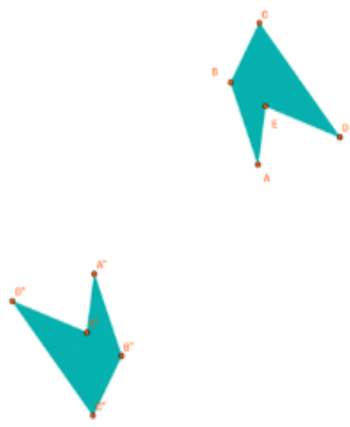
Fonte: recorte da folha de tarefa (Assis, 2016).

Na área de trabalho do *tablet*, onde o aluno realizava manipulações, o sistema de coordenadas estava habilitado, pois em implementações anteriores, alunos o utilizavam como uma referência para elaborar e validar suas estratégias (Assis, 2016). Cabe frisar que a primeira versão desta tarefa foi realizada por outros sujeitos² distintos dessa pesquisa.

Após revisitações e análises dos vídeos das implementações com a tarefa na 1ª versão, verificou-se que alguns alunos realizaram o deslocamento sem utilizar os eixos como um recurso auxiliar. Com o objetivo de criar situações para que os alunos se sentissem mais instigados e aumentar a complexidade da tarefa, optou-se por retirar os eixos coordenados, inserimos um questionamento e um ícone (reflexão em relação a um ponto) representado por três pontos (um vermelho e dois azuis) que possibilita realizar a reflexão de uma construção em relação a um determinado ponto. No Quadro 1, expõe a tarefa “Deslocando o polígono” na sua segunda versão e sem os eixos coordenados.

²Caso o(a) leitor(a) queira verificar o processo inicial, poderá acessar o documento disponível no link http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFRRJ-1_3fa3ce5ff903806dfdb771affb8d0cc2

Quadro 1 – 2ª Versão da tarefa “Deslocando o polígono” Tarefa 5

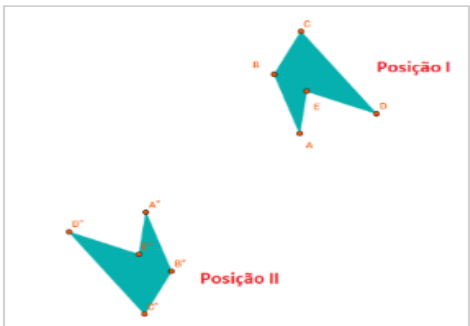
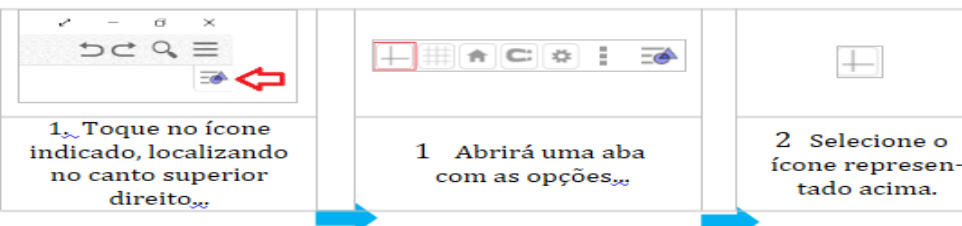
Tarefa	Características
• Abra o arquivo “Tarefa 05”. • Teremos a seguinte construção:  Figura 01 – Deslocando o polígono (a) Com auxílio das ferramentas disponibilizadas pelo <u>GeoGebra</u>, utilize pelo menos uma das ferramentas  e elabore uma estratégia para deslocar a figura ABCDE na figura <u>A''B''C''D''E''</u>. Descreva todo procedimento. (b) É possível efetuar tal deslocamento utilizando apenas uma única ferramenta somente uma vez? Justifique	• Retirada dos eixos coordenados • Modificação do questionamento inicial, com a inserção do ícone • Elaboração de um novo questionamento (item b)

Fonte: recorte da folha de tarefa.

Nessa versão, os alunos encontraram dificuldades para realizar a tarefa. Na tentativa de buscar um melhor entendimento dos possíveis entraves, foi perguntado qual foi a dificuldade encontrada em relação aos recursos do programa ou se algo não ficou claro. Uma das discentes argumentou que na tarefa não estava claro o que era para ser feito. Na sequência, outros estudantes efetuaram alguns questionamentos: “como assim deslocar a figura ABCDE na figura A''B''C''D''E''?”, “Mas não tá claro, posso utilizar mais de uma ferramenta, como assim?”, “Mas tem que ficar certinho?”.

A tarefa foi redesenhada e houve a inserção da indicação da posição inicial e final para as construções, o item (a) foi reescrito com a indicação de ícones na barra de ferramenta e sugestão de um caminho para inserção dos eixos coordenados.

Quadro 2 – 3ª Versão da tarefa “Deslocando o polígono” Tarefa 05

Tarefa	Características
• Abra o arquivo “Tarefa 05”. • Teremos a seguinte construção:  Figura 1 – Deslocando o polígono Observe as ferramentas destacadas com uma seta, representada na figura seguinte:  Figura 2 – Barra de ferramentas (a) Utilize pelo menos uma das ferramentas destacadas e elabore uma estratégia para deslocar o polígono da Posição I para Posição II, sabendo que é permitido utilizar outras ferramentas do GeoGebra. Descreva sua estratégia. Caso julgue necessário, poderá inserir os eixos coordenados. Para tal, siga as orientações a seguir:  Figura 3 – Barra de ferramentas (b) É possível efetuar tal deslocamento utilizando apenas uma única ferramenta somente uma vez? Justifique.	• Indicação das posições das construções, • Reescrita do item (a) e • Inserção de localizações dos ícones.

Fonte: folha de tarefa.

O processo foi mediado por artefatos como *tablet*, *software*, ícones, toques em telas, Folha de ícones, por exemplo, sem minorar a importância dos gestos, fala e escrita. Esses elementos pertencentes ao pacote semiótico (Arzarello, 2006; Bairral, 2017) são elementos que constituem uma arquitetura propícia à exploração e ao desenvolvimento de situações matemáticas, com elaboração de conjecturas que, amplificadas pelo AGD, podem ser testadas, validadas ou refutadas, contribuindo para o processo de (re)significação e apropriação. Fato que podemos constatar nas anotações realizadas por estudantes na folha de ícones.

Figura 5 – Registro na folha de ícones

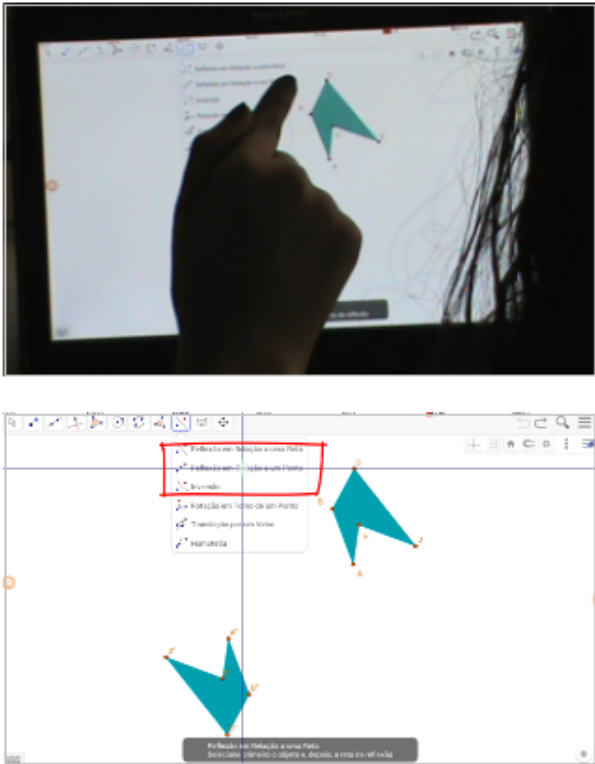
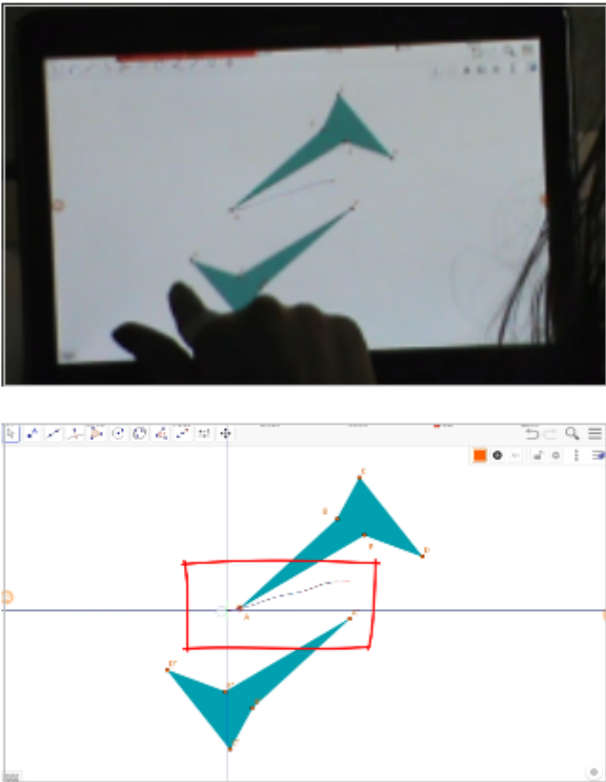
	Uma reta paralela que espelha o objeto duplo
	Duplica o objeto
	Inverte a posição tanto dos pontos quanto da imagem
	Duplica o polígono selecionado (180° ^{inverte o ângulo})
	Ponto que caracteriza o quadrilátero
	

Fonte: recorte da folha de ícones

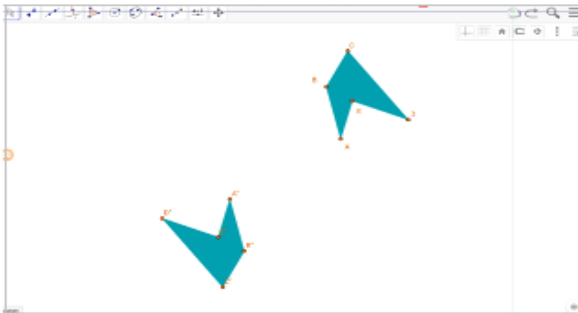
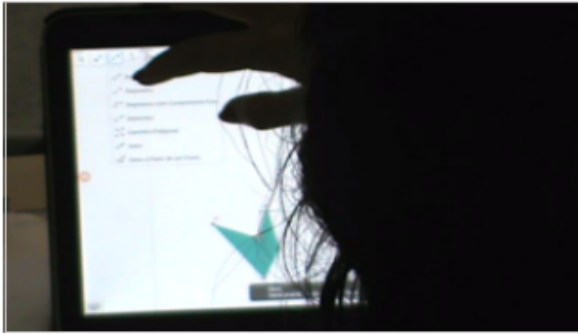
A fim de esboçar um desses momentos, o Quadro 3 uma linha do tempo com algumas ações realizadas pelas alunas³ R e M imersas no contexto de negociação que objetivou a elaboração de uma estratégia para deslocar o polígono da Posição I para Posição II.

³ Foram adotadas as iniciais dos nomes para identificar os estudantes envolvidos.

Quadro 3 – R e M explorando recursos

Captura	Toque na tela	Análise
5min 51s 	Toque simples	Seleciona a barra de ferramenta e indica e sugere um recurso para uma possível exploração e seleciona o recurso “reflexão em torno de um ponto”.
6min 29s 	Arrasto para esquerda	Seleciona um elemento da construção e arrasta para esquerda.

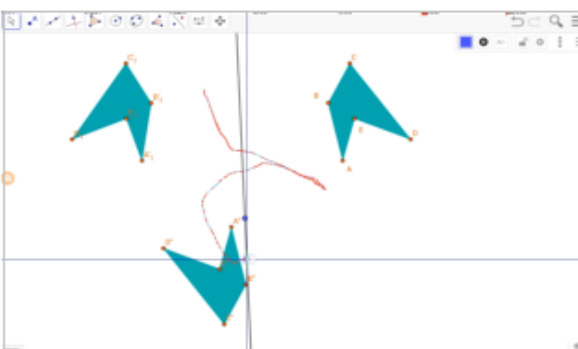
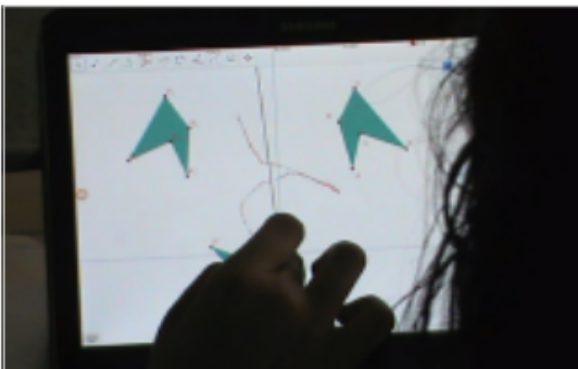
6min 55s



Toque
simples

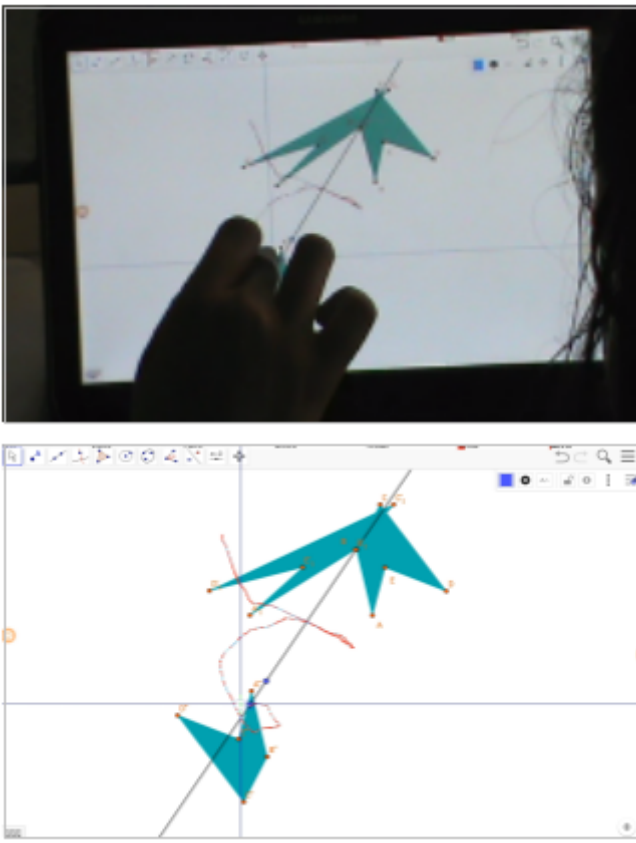
A aluna reinicia
o processo de
“duplicação”,
selecionando as
opções para a
construção de um reta
e reflexão em relação
à reta.

7min 46s



Composição de
movimentos
com arrasto
para direita,
depois para
esquerda,
com rastro
arqueado

Seleciona um
ponto da reta e
realiza movimentos
circulares combinado
com arrasto de um
ponto.

7min 50s 	Composição de movimentos com arrasto para direita, depois para esquerda, com rastro arqueado	Seleciona um ponto da reta e realiza movimentos circulares combinado com arrasto de um ponto.
--	---	--

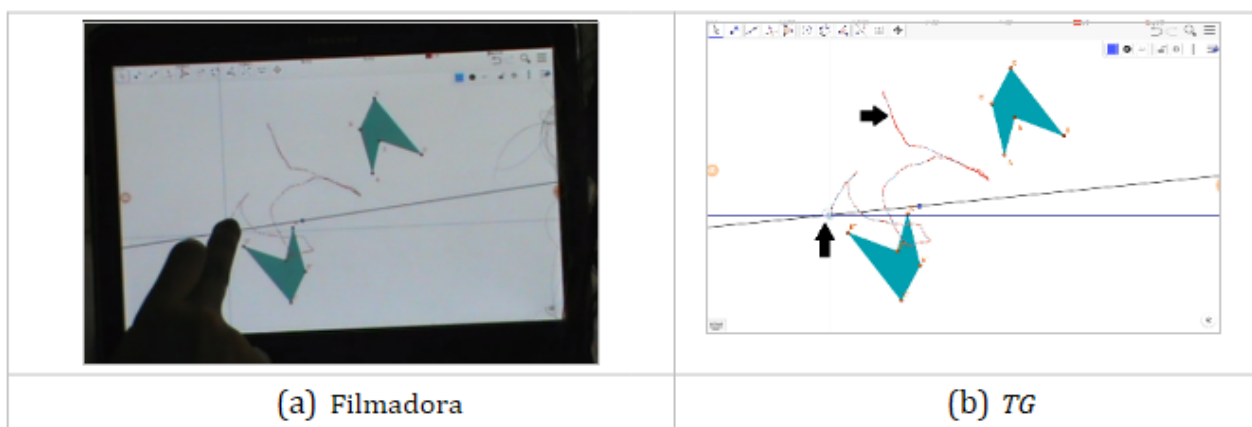
Fonte: elaborado pelos autores.

A aluna R sugeriu o recurso “Rotação em torno de um ponto”, mas na tarefa que abordou a utilização do recurso sugerido, as alunas observaram que ao efetuarem a rotação não permitia mover a construção “duplicada”. A denominação “duplicada” foi comumente utilizada entre os participantes das atividades com uma menção ao resultado das ações “Rotação em torno de um ponto”, “Reflexão em relação a uma reta” e “Translação por um vetor”. Diante da impossibilidade de movimentação, adotam a “duplicação” em relação a uma reta (Reflexão), pois dessa maneira poderiam movimentar a reta e, conseqüentemente, a figura resultante da refletida.

Na tentativa de um melhor entendimento sobre a estratégia utilizada pelas alunas, ao reproduzir procedimentos, não foi obtido o mesmo resultado que as discentes. Ao sincronizar a filmagem e a TG, e efetuar o passo-a-passo, e não foi possível identificar tal deformação da figura refletida, observado quando realizaram o deslocamento da reta construída para efe-

tuar a “duplicação” do polígono. Este fato abre espaço para a questão da relativização de resultados fornecidos pelos *softwares*. Neste momento, é oportuno destacar, que, mesmo com esse “*bug*” (sem indícios de ter sido identificado pelas alunas), as discentes buscavam uma explicação para tal deformação. Realizaram manipulações sobre a tela que nos remetem a movimentos em forma de arcos, movimentos capturados pela TG (Figura 6 (b)) quando selecionaram um ponto da reta e realizaram o movimento contínuo, sinalizado pela linha composta por pontos vermelhos e azuis⁴.

Figura 6 - Instante 7min 59s



Fonte: captura de quadros gerados a partir das gravações.

Os *tablets* foram preparados para indicar o toque na tela durante uma ação. Denominamos de unidade de ação o momento em que a discente toca a tela e, com o dedo em contato com a tela, realiza manipulações *touch*. Ao retirar o dedo e iniciar novas manipulações, o rastro indicado na tela do dispositivo é deletado e iniciado uma nova indicação.

Tais unidades de ações são registradas pela TG. Recurso este que nos auxilia em nossas análises, pois na Figura 6 (b) podemos observar uma unidade de ação realizada pela aluna ao deslocar a reta que usa como recurso para efetuar o deslocamento da figura “duplicada”. Com este recurso habilitado no *tablet*, podemos observar o percurso realizado pelo estudante durante essa unidade. O dispositivo indica o rastro não como um traça-

⁴ Este recurso, habilitado a partir da configuração disponibilizada pelo *tablet*, possibilita identificar a localização do ponteiro no instante do toque, fornecendo as coordenadas e quantidades de toques.

do contínuo, mas adota uma composição de pontos vermelhos e azuis, pois ao habilitar a função de localização do ponteiro, também é possível medir a precisão e as coordenadas. Momento com uma maior cobertura de pontos vermelhos, verificamos que o movimento realizado com um indicativo de que o aluno, durante a unidade de ação, observava e/ou analisava o que acontecia com a figura “duplicada”, momentos em que busca um refinamento para a escolha de uma melhor estratégia para resolver o problema, momento de ajuste da construção ou retomada de uma nova construção.

Os recursos tecnológicos e semióticos mobilizados constituem um sistema integrado de significação que dialoga com o conceito de pacote semiótico proposto por Arzarello (2006). Nesse pacote, as modalidades não operam isoladamente, mas articulam-se, simultaneamente, na produção e apropriação de significados matemáticos.

Do ponto de vista da mediação semiótica, tal como discute Mariotti (2009), a tarefa não se reduz a uma sequência de ações mecânicas, mas se constitui como um ambiente em que o artefato (GeoGebra no tablet) “fala” com o sujeito, oferecendo respostas, limites, pistas e contradições que orientam o refinamento das estratégias. Nesse primeiro momento, o professor⁵ percebeu que, após algumas tentativas para realizar a transformação, as alunas encontraram dificuldades para decidir qual a melhor estratégia, pois focaram no uso da “inversão”. O referido recurso foi utilizado como parte da estratégia inicial, mas, revisitando as gravações, não conseguimos reproduzir tal ação. No entanto, a situação foi frutífera, pois identificamos momentos de resgate de situações já vivenciadas, mesmo não demonstrando familiaridade com o processo.

⁵ Primeiro autor nesse capítulo.

Prof:	Qual foi o procedimento que vocês utilizaram?
M:	A gente primeiro, utilizou esse aqui de cima, rotação em relação... [<i>aponta para a opção na Folha de ícones</i>], só que a gente não conseguiu, mas foi algo que ajudou e fez a gente pensar no que a gente poderia fazer, logo após, usamos esse “reflexão em relação ao ponto”, não soubemos usar da forma correta e a gente trocou pela “inversão”...
R:	Calma aí! Rapidinho, licença. Esse aqui “reflexão em relação ao ponto” não funciona. Ele não sai do lugar. [<i>aponta com o lápis a superfície do tablet</i>]
Prof.:	É!?
R:	Não tem mudança nenhuma na tela quando a gente clica na tela. [<i>Realiza um movimento com as mãos sobre a superfície do tablet, com as mãos juntas ao centro do dispositivo e com uma ação que nos remete a uma ação de abrir, afasta as mãos em direção às bordas laterais</i>]
M:	Clica não, toca.
Prof:	Ok! Então qual foi a que vocês utilizaram e sentiram que deu pra fazer alguma coisa?
M:	Inversão.
Prof:	Ah, Ok! Então não foi a... [<i>pausa</i>]. Então foi a “inversão” que vocês utilizaram?!

Enquanto o professor indaga, a aluna M inicia o processo, baseado em toque simples, com o objetivo de selecionar o ícone “Inversão”. Após ter selecionado o ícone mencionado, toca no polígono ABCD e tenta deslocar a construção realizando movimentos circulares. Mas percebe que não consegue o mesmo resultado obtido em um momento anterior. A discente M lembra da construção de uma reta que construíram para movimentar a construção “duplicada”.

M:	Ué! Será que só funciona com a reta?
R:	Acho que tem que ter uma reta, num é não? Olha o desenhinho.
M:	Você quer fazer uma reta? [<i>risos</i>] Ela adora uma reta!
R:	Não, é que aqui no desenho está especificado. Num tá não? O quê está escrito nele? Essa “inversão”. [<i>aluna seleciona o ícone que apresenta informações sobre a opção “inversão”</i>]
M:	Tá!
R:	Tem uma reta no meio.

A aluna R chama atenção para o que está representado no ícone, embora o ícone “Inversão” não contenha uma reta, e sim um arco de circunferência, tal fato contribui para que a estudante M percebesse que se tratava de uma reta e a opção selecionada realizava a transformação em relação a uma circunferência.

R:	Tenta mexer.
M:	Não tá mexendo. <i>[pausa na fala, tentam selecionar elemento para mover a construção]</i>
Prof:	Então vocês não utilizaram ali a ferramenta. Então o que vocês têm que fazer? <i>[aluna seleciona o ícone]</i> Vocês têm que selecionar o que primeiro?
M:	Ahhhh... Primeiro objeto e depois o círculo. <i>[aluna ler as informações fornecidas na caixa de texto na parte inferior da tela]</i>
Prof:	Ahhhh...
M:	Mas aqui não usou círculo.
Prof:	Primeiro o objeto. Ok!
M:	Tá.
Prof:	Só que vocês estão fazendo em relação ao círculo, num é?
M:	Mas aqui não tem círculo.
Prof:	Exatamente.
M:	Como é que funcionou antes?
Prof:	Entendeu?
R:	Eu, num sei Maria, acho que foi no rodar e você não percebeu.
M:	Não, Não... Estamos fracassando.

Sem conseguir entender por que o procedimento elencado não funcionou, a aluna R sugere outra saída. Quando indica “vai lá no outro”, refere-se ao ícone “reflexão em relação ao ponto” e inicia um novo processo.

R:	Então vai lá no outro.
M:	Qual outro?
R:	Reflexão em torno de um ponto.
M:	Vamos ver então essa.
R:	Vamos ver a observação dessa. Objeto e centro da reflexão em relação ao objeto.
M:	Aconteceu alguma coisa.
R:	É objeto, você tocou no centro.
M:	Não, mas aqui tem o “Ê”.
R:	Mas acho que foi no ponto, no “azinho”.
M:	É, foi no pronto que deu “Ê”. Tudo bem, vamos lá...Acho que vai duplicar. De qual que você está falando? [...] Tá, reflexão em torno de...

Ao selecionar a ferramenta “reflexão em torno de um ponto”, buscou pela informação disponibilizada na caixa na parte inferior do dispositivo. Na sequência, selecionaram o polígono ABCD e o ponto pertencente à reta. Obtendo assim a figura duplicada com o “mesmo formato” que o polígono da Posição II. A partir desse momento, a aluna R sinaliza necessário selecionar “mover” para movimentar a reta e ajusta a figura “duplicada” na Posição II.

R:	Tá, dá um zoom de novo.
M:	O que você quer?
R:	Esse aqui. [<i>seleciona o ícone reflexão em relação ao ponto, na sequência, o objeto e, depois, o ponto pertencente à reta</i>].
M:	Deu igual, mas ele não encaixa.
R:	Encaixa sim! É só colocar mover.
Prof:	Isso, agora mexe essa reta.
R:	Tá indo não. [...] hummm... não tenho essa precisão.
M:	É pra encaixar assim mesmo?
Prof:	Ué, qual foi a ferramenta que você utilizou?
R:	Essa, reflexão em relação ao ponto. O problema foi que a gente não selecionou o objeto primeiro.

A descrição desse episódio torna visível que, ao tocar, arrastar, girar e observar os efeitos de suas ações na tela, as estudantes são agentes de um processo contínuo de produção de signos. Esses signos, como destaca Pino (2004), não são entidades abstratas, mas manifestações culturais que organizam experiências e revelam pensamentos. Na prática da tarefa, os toques em tela, os movimentos arqueados, as pausas e retomadas, e até mesmo a nomeação informal de resultados da ação, como o termo “duplicada”, por exemplo, revelam o caráter cultural da significação em ambientes mediados por tecnologias digitais.

CONFIGURANDO NOVOS RASTROS

Os resultados discutidos ao longo deste capítulo evidenciam que a aprendizagem matemática em ambientes digitais é constituída por um conjunto complexo de interações semióticas, nas quais gestos, toques, falas, ícones, artefatos e (re)design de tarefa operam de maneira integrada. A análise do episódio da tarefa apresentada, articulada às bases teóricas sobre significação e mediação, demonstrou que os signos produzidos pelos estudantes não são dissociáveis da atividade cognitiva.

Nessa dinâmica, as telagravações se configuram como um recurso que densifica o processo de análise, ao permitir que as ações no ambiente digital sejam revisitadas e analisadas em detalhe, sem perder de vista o contexto mais amplo da interação. Não se trata, porém, de estabelecer um procedimento prescritivo ou de propor um protocolo universal para elaboração de tarefas. A intenção é construir arquétipos de análise que, embora derivados de um contexto específico, possam inspirar (re)configurações em outras situações, respeitando suas especificidades.

Assim, a gravação dos bastidores desloca o foco de uma mera documentação tecnológica para o uso analítico desses registros, orientado à compreensão dos processos de elaboração e apropriação de significados pelos estudantes e à qualificação progressiva do design de tarefas em ambientes digitais.

A telagravação possibilitou empreender análises que permitem afirmar que o aprendizado de transformações geométricas no GeoGebra não se reduz ao domínio de recursos ou comandos. Ele se constitui como um processo corporificado, coletivo e multimodal, no qual os estudantes se apropriam de recursos culturais e tecnológicos para elaborar, compartilhar e negociar significados. Tal assertiva destaca o papel central dos artefatos digitais como mediadores, que não se limita a ações técnicas, mas a formas específicas de ver, agir e pensar matematicamente.

O movimento dos signos revelados pela telagravação revela que a aprendizagem matemática, especialmente em ambientes digitais, é inse-

parável dos modos semióticos que a constituem. Os rastros, interações, gestos, discursos e ações dos estudantes constituem signos dinâmicos que revelam não só estratégias de resolução, mas também a construção de pensamentos matemáticos mediada pelo uso de tecnologias. Em estudos recentes, estamos integrando o rastreador ocular para enriquecer nosso espectro de análise da aprendizagem geométrica de alunos e (futuros) professores (Bairral, Aldon, 2024; Bairral, Menezes, Henrique, 2024).

REFERÊNCIAS

- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9 (Extraordinario 1), 267–299.
- Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(3), 66–72.
- Assis, A. R. de (2016). *Alunos do ensino médio trabalhando no GeoGebra e no Geometric Constructor: Mãos e rotações em touchscreen* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. Brasil.
- Assis, A. R. de. (2020). *Alunos do ensino médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra* (Tese de doutorado). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. Brasil.
- Assis, A. R. de, & Bairral, M. A. (2022). Touches on screen as new signs in blended ways to think mathematically. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(4), 423–441. <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.4.423>
- Assis, A. R. de, Henrique, M. P., & Bairral, M. A. (2020). Gravações de telas: Captura de toques realizados por alunos em dispositivos móveis. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisa em Educação Matemática*, 2(1), 19–32. <https://doi.org/10.36661/2596-318X.2020v2n1.11533>
- Baccaglioni-Frank, A. E., & Sinclair, N. (2017). Surprise-driven abductions in DGEs. In *Proceedings of the 13th International Conference on Teaching Mathematics with Technology*.
- Bairral, M. A. (2017). As manipulações em tela compoendo a dimensão corporificada da cognição matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 10, 104–111.

Bairral, M. A., & Aldon, G. (2024). The integration of digital technology in task-design on eye-tracking studies in geometry. *Journal of Research in Mathematics Education (REDIMAT)*, 13(2), 164–179. <https://doi.org/10.17583/redimat.15041>

Bairral, M. A., Menezes, R. O., & Henrique, M. P. (2024). Uso do rastreamento ocular na formação de professores: Uma revisão em geometria. *Boletim Gepem*, (83), 179–201. <https://doi.org/10.69906/GEPEM.2176-2988.2024.997>

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. D. English, M. G. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 746–805). Routledge.

Carvalho, V. D., Borges, L. O., & Rêgo, D. P. do. (2010). Interacionismo simbólico: Origens, pressupostos e contribuições aos estudos em psicologia social. *Psicologia: Ciência e Profissão*, 30(1), 146–161.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A. A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9–13.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, 10(1–2), 113–163.

Cobb, P., Zhao, Q., & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *Journal of the Learning Sciences*, 18(2), 165–199. <https://doi.org/10.1080/10508400902797933>

Downing-Wilson, D., Lecusay, R., & Cole, M. (2011). Design experimentation and mutual appropriation: Two strategies for university/community collaborative after-school interventions. *Theory & Psychology*, 21(5), 656–680. <https://doi.org/10.1177/0959354311414456>

Mariotti, M. A. (2009). Artefacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 41, 427–440. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0199-z>

McNeill, D. (2002). Gesture and language dialectic. *Acta Linguistica Hafniensia*, 1–25. <http://mcneilllab.uchi-cago.edu/pdfs/GESTURE-LANGUAGE.pdf>

Pino, A. (1995). Semiótica e cognição na perspectiva histórico-cultural. *Temas em Psicologia*, 3(2), 31–40.

Pino, A. (2000). O social e o cultural na obra de Vigotski. *Educação & Sociedade*, 21(71), 45–77. <https://doi.org/10.1590/S0101-73302000000200003>

Pino, A. (2003). Técnica e semiótica na era da informática. *Contrapontos*, 3(2), 283–296.

Pino, A. (2004). Ensinar–aprender em situação escolar: Perspectiva histórico-cultural. *Contrapontos*, 4(3), 439–460.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 46(3), 349–361.

CAPÍTULO 4

O ensino da Geometria no Chile: entre a pesquisa e as mudanças curriculares

Carlos Silva Córdova

Resumo: O capítulo “O ensino da Geometria no Chile: entre a pesquisa e as mudanças curriculares” analisa a evolução e os desafios dessa área no sistema educacional chileno. De uma abordagem tradicional para uma centrada em habilidades como visualização, raciocínio e representação, são identificados avanços curriculares e contribuições da pesquisa didática. No entanto, persistem tensões entre teoria, currículo e prática docente, dificultadas por avaliações padronizadas e formação insuficiente. Destacam-se boas práticas em diversos contextos e propõe-se fortalecer a formação docente, alinhar avaliação e currículo e traduzir a pesquisa em estratégias pedagógicas acessíveis e significativas.

Palavras-chave: Geometria escolar. Formação de professores. Mudanças curriculares.

Resumen: El capítulo “La enseñanza de la Geometría en Chile: entre la Investigación y los cambios curriculares” analiza la evolución y desafíos de esta área en el sistema educativo chileno. Desde un enfoque tradicional hacia uno centrado en habilidades como visualización, razonamiento y representación, se identifican avances curriculares y aportes de la investigación didáctica. Sin embargo, persisten tensiones entre teoría, currículo y práctica docente, dificultadas por evaluaciones estandarizadas y formación insuficiente. Se destacan buenas prácticas en diversos contextos y se propone fortalecer la formación docente, alinear evaluación y currículo, y traducir la investigación en estrategias pedagógicas accesibles y significativas.

Palabras-clave: Geometría escolar. Formación de profesores. Cambios curriculares.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la geometría en Chile ha sido históricamente una de las áreas menos desarrolladas del currículo de matemáticas, a pesar de su reconocido aporte al desarrollo del pensamiento espacial, la visualización, la argumentación y la resolución de problemas (Duval, 1999; Arcavi, 2003; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014). Diversos estudios internacionales coinciden en que el aprendizaje geométrico constituye un componente esencial para la alfabetización matemática y para el desarrollo de competencias necesarias en los ámbitos científico, tecnológico y ciudadano del siglo XXI (OECD, 2023; UNESCO, 2021).

En el contexto chileno, la evolución curricular de la geometría ha estado marcada por períodos de expansión y de reducción de sus contenidos, reflejando las distintas orientaciones epistemológicas y pedagógicas que han caracterizado las reformas educativas de las últimas décadas. Mientras durante gran parte del siglo XX predominó una enseñanza centrada en la demostración formal y el rigor axiomático, las reformas curriculares implementadas desde la década de 1990 comenzaron a incorporar perspectivas orientadas al desarrollo de habilidades, enfatizando la visualización, la modelación, la representación y la argumentación matemática (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012, 2015, 2019). Estas transformaciones responden también a recomendaciones formuladas por organismos internacionales como la UNESCO (2021), la OECD (2023) y el NCTM (2014), que promueven una educación matemática centrada en competencias y en el aprendizaje significativo.

Paralelamente, la investigación en didáctica de la geometría ha experimentado un crecimiento sostenido tanto a nivel internacional como nacional. Las contribuciones de Duval (1999) sobre los registros de representación semiótica, de Arcavi (2003) respecto del pensamiento visual y de Clements y Sarama (2020) acerca del desarrollo del razonamiento geométrico han influido significativamente en la comprensión contemporánea de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. En Chile, diversos grupos de investigación han estudiado aspectos relacionados con la visualización, el razonamiento espacial, el uso de tecnologías

digitales y la formación inicial y continua del profesorado, contribuyendo progresivamente al fortalecimiento de este campo disciplinar.

No obstante estos avances, persisten importantes tensiones entre el conocimiento generado por la investigación, las orientaciones curriculares oficiales y las prácticas efectivamente desarrolladas en las aulas escolares. La escasa formación específica del profesorado, la limitada disponibilidad de recursos didácticos, las presiones derivadas de los sistemas de evaluación estandarizada y las desigualdades territoriales continúan dificultando la implementación de propuestas innovadoras para la enseñanza de la geometría (OECD, 2023; UNESCO, 2021; MINEDUC, 2019).

Este capítulo tiene como propósito analizar la evolución de la enseñanza de la geometría en Chile desde una perspectiva histórica, curricular y didáctica, examinando las relaciones entre la investigación educativa, las transformaciones curriculares y las prácticas docentes. Para ello se adopta una metodología cualitativa de carácter documental basada en el análisis de documentos curriculares oficiales, investigaciones nacionales e internacionales y literatura especializada en didáctica de la geometría. Este enfoque permite comprender la manera en que las contribuciones de la investigación han incidido —o no— en las políticas educativas y en la enseñanza escolar de la geometría en Chile.

BREVE PANORAMA HISTÓRICO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN CHILE

La evolución de la enseñanza de la geometría en Chile refleja las transformaciones experimentadas por el sistema educativo nacional durante las últimas seis décadas. Dicho proceso ha estado condicionado tanto por cambios curriculares como por nuevas concepciones acerca de la naturaleza del conocimiento matemático, del aprendizaje y de la enseñanza. Asimismo, la trayectoria histórica evidencia una permanente tensión entre los enfoques disciplinares tradicionales y las perspectivas contemporáneas centradas en el desarrollo de competencias matemáticas (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; NCTM, 2014).

Décadas de 1960 y 1970: la geometría como estructura formal

Durante las décadas de 1960 y 1970 la enseñanza de la geometría en Chile estuvo profundamente influenciada por el denominado movimiento de la Matemática Moderna, inspirado en las propuestas estructuralistas del Grupo Bourbaki. En este contexto, el currículo privilegiaba el estudio sistemático de definiciones, axiomas, postulados y demostraciones formales, entendiendo la geometría como un sistema lógico-deductivo destinado a desarrollar el rigor matemático (Bishop, 1988; Freudenthal, 1991).

La enseñanza se concentraba en contenidos como congruencia, semejanza, construcciones geométricas y demostraciones euclidianas, otorgando escasa relevancia a la visualización, la manipulación de materiales o la resolución de problemas contextualizados. Diversos autores han señalado posteriormente que este enfoque resultó excesivamente abstracto para gran parte del estudiantado y dificultó la comprensión conceptual de la geometría (Fischbein, 1993; Duval, 1999).

Décadas de 1980 y 1990: reducción del contenido geométrico

Durante las reformas curriculares desarrolladas en los años ochenta y en el período inicial del retorno a la democracia, la geometría perdió progresivamente protagonismo dentro del currículo nacional. La prioridad otorgada al desarrollo de habilidades aritméticas y algebraicas, junto con la creciente influencia de las evaluaciones estandarizadas, produjo una disminución significativa de los contenidos geométricos impartidos en los distintos niveles escolares (MINEDUC, 1998; Cox, 2003).

Esta reducción curricular afectó especialmente el desarrollo del pensamiento espacial y del razonamiento visual, competencias actualmente consideradas fundamentales para el aprendizaje matemático y científico (Battista, 2007; Clements & Sarama, 2020). En numerosos establecimientos educacionales la geometría pasó a ocupar un lugar secundario, siendo abordada únicamente al finalizar el año escolar o como complemento de otros contenidos matemáticos.

Período 1996–2009: primeras señales de recuperación

La Reforma Educacional iniciada durante la década de 1990 introdujo un conjunto de innovaciones destinadas a fortalecer la calidad y pertinencia del currículo escolar chileno. En este marco comenzaron a reincorporarse contenidos geométricos asociados al reconocimiento de figuras, transformaciones, localización espacial y resolución de problemas, incorporando gradualmente orientaciones provenientes de la didáctica de las matemáticas (MINEDUC, 1996; Cox, 2003).

Sin embargo, diversos estudios evidencian que estas modificaciones curriculares no fueron acompañadas de programas sistemáticos de desarrollo profesional docente ni de recursos didácticos suficientes para favorecer una implementación efectiva en las aulas (UNESCO, 2016; Clements & Sarama, 2020). En consecuencia, persistieron diferencias importantes entre las orientaciones curriculares y las prácticas pedagógicas efectivamente desarrolladas.

Desde 2012: revalorización del razonamiento y la visualización

La promulgación de las Bases Curriculares para Educación Básica (2012), posteriormente ampliadas a Educación Media (2015 y 2019), representa uno de los cambios más significativos en la enseñanza de la geometría en Chile. Estos documentos incorporan explícitamente el desarrollo de habilidades de visualización, representación, razonamiento, modelación y argumentación, promoviendo una comprensión progresiva del espacio y de las relaciones geométricas (MINEDUC, 2012, 2015, 2019).

Las nuevas orientaciones curriculares muestran una clara convergencia con las recomendaciones formuladas por el NCTM (2014), la OECD (2023) y la UNESCO (2021), que proponen una educación matemática orientada al desarrollo de competencias, al uso de tecnologías digitales y a la resolución de problemas auténticos.

Asimismo, la actualización curricular de tercero y cuarto año de enseñanza media incorporó asignaturas electivas como Geometría Euclidia-

na y Geometría 3D, destinadas a profundizar el razonamiento deductivo, la modelación espacial y el uso de herramientas digitales, ampliando las oportunidades de formación para estudiantes interesados en áreas STEM (MINEDUC, 2019).

Análisis crítico

A pesar de los avances curriculares observados durante la última década, la implementación efectiva de estas transformaciones continúa enfrentando importantes desafíos. Diversas investigaciones señalan que persisten brechas significativas entre las orientaciones oficiales, la formación del profesorado y las prácticas de aula, particularmente en relación con el desarrollo de la visualización, la argumentación y el uso pedagógico de tecnologías digitales (Sinclair *et al.*, 2023; Clements & Sarama, 2020).

La evidencia disponible muestra que el éxito de las reformas curriculares depende no solo del diseño de nuevos programas de estudio, sino también de políticas sostenidas de desarrollo profesional docente, disponibilidad de recursos tecnológicos, fortalecimiento de las comunidades profesionales de aprendizaje y coherencia entre currículo, evaluación y formación inicial del profesorado (OECD, 2023; UNESCO, 2021). En consecuencia, la evolución histórica de la enseñanza de la geometría en Chile pone de manifiesto que los cambios curriculares constituyen una condición necesaria, pero insuficiente, para transformar las prácticas pedagógicas y mejorar los aprendizajes de los estudiantes.

APORTES DE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA EN CHILE

La investigación en didáctica de la geometría en Chile ha experimentado un desarrollo sostenido desde finales del siglo XX, consolidándose progresivamente como una línea específica dentro de la Educación Matemática. Si bien durante varias décadas la producción científica nacional se concentró principalmente en el aprendizaje del álgebra, la resolución de problemas y la formación inicial del profesorado, en los últimos veinte años

la geometría ha adquirido creciente relevancia debido a las transformaciones curriculares, al desarrollo de nuevas perspectivas epistemológicas y a la incorporación de tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, Batanero, Font, & Giacomone, 2022; Sinclair, de Villiers, & Kaiser, 2023; UNESCO, 2021).

Este crecimiento también responde a una tendencia internacional que reconoce la geometría como un eje fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, la modelación, la visualización y la comprensión del espacio. Estudios recientes muestran que las habilidades espaciales constituyen uno de los mejores predictores del éxito posterior en matemáticas, ciencias e ingeniería, lo que ha impulsado nuevas líneas de investigación orientadas al fortalecimiento del razonamiento geométrico desde los primeros niveles educativos (Clements & Sarama, 2020; OECD, 2023; Fujita & Jones, 2020).

Temas recurrentes en la investigación chilena sobre geometría

La producción científica desarrollada en universidades chilenas evidencia una diversidad creciente de enfoques teóricos y metodológicos. No obstante, pueden identificarse varias líneas de investigación que concentran gran parte de las publicaciones nacionales.

Desarrollo del razonamiento espacial y la visualización

Uno de los temas más investigados corresponde al desarrollo del pensamiento espacial y de las habilidades de visualización. Diversos estudios muestran que un porcentaje importante de estudiantes presenta dificultades para interpretar representaciones bidimensionales y tridimensionales, imaginar transformaciones geométricas y establecer relaciones espaciales entre distintos objetos matemáticos (Duval, 1999; Battista, 2007; Clements & Sarama, 2020).

La teoría de los registros de representación semiótica propuesta por Duval (1999) ha servido de fundamento para numerosas investigaciones

desarrolladas en Chile, permitiendo comprender que buena parte de las dificultades observadas no radica únicamente en los conceptos geométricos, sino también en la capacidad de los estudiantes para coordinar distintos sistemas de representación — gráfico, verbal, algebraico y simbólico — durante la resolución de problemas.

En este contexto, Arcavi (2003) sostiene que la visualización constituye una forma de pensamiento matemático que favorece la formulación de conjeturas, la argumentación y la comprensión conceptual, superando la tradicional dicotomía entre intuición y formalización.

Lenguaje geométrico y construcción conceptual

Otra línea de investigación ampliamente documentada corresponde al aprendizaje del lenguaje geométrico escolar. Diversos estudios muestran que conceptos fundamentales como vértice, arista, perpendicularidad, congruencia, semejanza o simetría suelen ser utilizados por los estudiantes de manera intuitiva, sin alcanzar una comprensión conceptual suficientemente profunda (Van Hiele, 1986; Duval, 1999).

Las investigaciones desarrolladas en didáctica de las matemáticas indican que la apropiación del lenguaje geométrico constituye un proceso gradual que requiere la articulación entre experiencias manipulativas, representaciones visuales, interacción social y argumentación matemática (Radford, 2018; Godino *et al.*, 2022).

En consecuencia, la enseñanza actual de la geometría promueve una integración equilibrada entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje matemático especializado, favoreciendo procesos de construcción progresiva del significado de los conceptos geométricos.

De la manipulación concreta al razonamiento abstracto

Uno de los problemas más estudiados por la investigación internacional consiste en explicar cómo los estudiantes transitan desde experiencias concretas hacia la formulación de propiedades generales y demostraciones matemáticas.

En Chile, diversas investigaciones han evidenciado que el uso de materiales manipulativos y software de geometría dinámica favorece inicialmente la comprensión intuitiva; sin embargo, ello no garantiza por sí solo el desarrollo de razonamientos deductivos si no existe una mediación pedagógica adecuada (Sinclair *et al.*, 2023; Clements & Sarama, 2020).

Esta problemática coincide con los resultados obtenidos por Duval (1999), quien sostiene que la simple observación de figuras no conduce automáticamente a la comprensión matemática, siendo necesario promover procesos de conversión entre diferentes registros de representación.

Asimismo, la perspectiva sociocultural desarrollada por Radford (2018) plantea que la construcción del conocimiento geométrico emerge mediante procesos colectivos de argumentación, interacción y producción de significados compartidos.

La enseñanza de la demostración

La demostración matemática constituye uno de los mayores desafíos identificados por la investigación contemporánea.

Diversos estudios muestran que en numerosos establecimientos escolares la demostración continúa reducida a procedimientos algorítmicos o secuencias memorísticas, sin favorecer procesos genuinos de argumentación matemática (Mariotti, 2022; de Villiers, 2021).

Desde la perspectiva de la didáctica de la geometría, demostrar implica mucho más que verificar propiedades: supone construir explicaciones, justificar relaciones y desarrollar formas de razonamiento deductivo que permitan comprender por qué una afirmación es verdadera (Stylianides & Stylianides, 2018).

Las Bases Curriculares chilenas incorporan explícitamente el desarrollo de habilidades de argumentación y justificación matemática; sin embargo, diversos estudios indican que estas orientaciones aún presentan dificultades importantes para su implementación en las prácticas de aula (MINEDUC, 2019; OECD, 2023).

Investigadores y grupos de investigación en Chile

El desarrollo de la investigación chilena en didáctica de la geometría ha sido impulsado por diversas universidades y centros especializados que han contribuido significativamente a la consolidación de este campo.

Entre ellos destacan equipos pertenecientes a la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, la Universidad de Playa Ancha, la Pontificia Universidad Católica de Chile, la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, la Universidad de Chile y la Universidad de Concepción, cuyos investigadores han desarrollado proyectos relacionados con:

- visualización matemática;
- razonamiento espacial;
- formación inicial del profesorado;
- uso de GeoGebra y tecnologías digitales;
- argumentación y demostración;
- modelación geométrica;
- enseñanza mediante representaciones múltiples.

En los últimos años, estas investigaciones han fortalecido el diálogo entre la didáctica francesa, la teoría de los registros de representación, la teoría de Van Hiele, la Educación Matemática Realista y las perspectivas socioculturales del aprendizaje matemático (Godino *et al.*, 2022; Radford, 2018; Sinclair *et al.*, 2023).

Asimismo, investigaciones recientes desarrolladas por Silva Córdova (2022, 2024, 2025) han comenzado a integrar la visualización matemática, la inteligencia artificial, la modelación y la evaluación del aprendizaje, proponiendo nuevos marcos conceptuales para comprender los procesos de enseñanza de la geometría en entornos digitales y el desarrollo del pensamiento matemático mediante tecnologías emergentes.

Articulación entre investigación y currículo

Uno de los aspectos más relevantes identificados por la literatura reciente corresponde a la creciente convergencia entre los resultados de

la investigación educativa y las orientaciones curriculares impulsadas por el Ministerio de Educación de Chile.

Las Bases Curriculares de Matemática incorporan explícitamente habilidades relacionadas con:

- visualización;
- representación;
- razonamiento;
- modelación;
- argumentación;
- resolución de problemas.

Estas competencias coinciden ampliamente con las recomendaciones formuladas por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), el NCTM, la OECD y la UNESCO respecto del desarrollo del pensamiento geométrico durante la escolaridad obligatoria (NCTM, 2014; OECD, 2023; UNESCO, 2021).

Sin embargo, diversos estudios coinciden en señalar que la transferencia efectiva de estos resultados hacia las prácticas docentes continúa siendo limitada debido a problemas asociados a la formación profesional, disponibilidad de recursos, políticas de desarrollo docente y sistemas de evaluación estandarizada (Godino *et al.*, 2022; OECD, 2023).

Obstáculos para la transferencia hacia la práctica docente

La literatura especializada identifica diversos factores que dificultan la incorporación del conocimiento generado por la investigación en la práctica escolar.

Entre los más relevantes destacan:

- insuficiente formación didáctica específica en geometría;
- escasa articulación entre universidades, escuelas y organismos públicos;
- baja disponibilidad de recursos tecnológicos;
- predominio de modelos tradicionales de enseñanza;

- presión ejercida por evaluaciones estandarizadas;
- limitadas oportunidades de desarrollo profesional continuo.

Investigaciones recientes muestran que la innovación educativa requiere procesos sostenidos de acompañamiento docente, comunidades profesionales de aprendizaje y una mayor integración entre investigación, formación inicial y políticas públicas (UNESCO, 2021; OECD, 2023; Godino *et al.*, 2022).

Análisis integrador

La investigación en didáctica de la geometría desarrollada en Chile evidencia un proceso de consolidación científica que dialoga crecientemente con las principales tendencias internacionales de la Educación Matemática. No obstante, el impacto de estos avances sobre las prácticas escolares continúa siendo desigual.

Los desafíos actuales no consisten únicamente en producir nuevo conocimiento científico, sino también en generar mecanismos efectivos de transferencia hacia la formación inicial y continua del profesorado, el diseño curricular, la evaluación y la innovación pedagógica.

En este contexto, la incorporación de tecnologías digitales, inteligencia artificial, visualización matemática y analítica del aprendizaje abre nuevas posibilidades para fortalecer la enseñanza de la geometría y favorecer el desarrollo de competencias matemáticas acordes con las demandas de la sociedad contemporánea (Holmes *et al.*, 2022; OECD, 2023; UNESCO, 2021; Silva, 2026).

CAMBIOS CURRICULARES RECIENTES Y SUS FUNDAMENTOS

Durante las últimas dos décadas, el currículo de Matemática en Chile ha experimentado un proceso de transformación orientado hacia un enfoque basado en competencias, en el que la enseñanza de la geometría adquiere un papel más relevante en el desarrollo del pensamiento matemático. Estas reformas responden tanto a las necesidades identificadas por

las investigaciones en Educación Matemática como a las recomendaciones formuladas por organismos internacionales, que destacan la importancia de fortalecer el razonamiento, la visualización, la modelación y la argumentación desde los primeros años de escolaridad (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012, 2015, 2019; OECD, 2023; UNESCO, 2021).

La evolución curricular chilena refleja, además, un cambio epistemológico significativo: la geometría deja de concebirse exclusivamente como un sistema formal de conocimientos para entenderse como una herramienta que permite interpretar el espacio, modelar fenómenos del entorno, desarrollar el pensamiento espacial y favorecer la resolución de problemas en contextos diversos (Arcavi, 2003; Duval, 1999; Fujita & Jones, 2020). Este cambio supone una transición desde una enseñanza centrada en contenidos aislados hacia otra que privilegia el desarrollo integrado de conocimientos, habilidades y actitudes matemáticas.

Las Bases Curriculares 2012 y 2015: un cambio de paradigma

La promulgación de las Bases Curriculares para Educación Básica (2012) y posteriormente para Educación Media (2015) constituye uno de los hitos más relevantes de la política curricular chilena en las últimas décadas. Estos documentos reorganizan el aprendizaje matemático alrededor de cuatro habilidades fundamentales: resolver problemas, representar, argumentar y comunicar, y modelar, competencias que atraviesan todos los ejes disciplinares, incluida la geometría (MINEDUC, 2012, 2015).

En este contexto, la geometría deja de reducirse al estudio de figuras y propiedades para transformarse en un espacio de desarrollo del razonamiento espacial, la visualización y la comprensión de relaciones geométricas presentes tanto en contextos matemáticos como en situaciones cotidianas. Esta orientación coincide con los planteamientos del National Council of Teachers of Mathematics (2014), que considera la geometría un eje articulador del pensamiento matemático escolar.

Asimismo, el currículo incorpora progresiones de aprendizaje que favorecen la construcción gradual del conocimiento geométrico, iniciando

con la exploración de formas y posiciones en los primeros años de Educación Básica, avanzando hacia el estudio de transformaciones, relaciones métricas y propiedades de figuras, y culminando en la Educación Media con procesos de argumentación y demostración (MINEDUC, 2012, 2015).

Visualización matemática como competencia curricular

Uno de los aportes más relevantes de las Bases Curriculares consiste en reconocer explícitamente la visualización como una habilidad matemática fundamental.

La literatura especializada ha demostrado que visualizar no implica únicamente observar figuras, sino construir representaciones mentales, interpretar diferentes registros semióticos, anticipar transformaciones y establecer relaciones espaciales complejas (Duval, 1999; Arcavi, 2003; Sinclair *et al.*, 2023).

En consecuencia, el currículo chileno propone actividades orientadas a:

- interpretar representaciones gráficas;
- construir modelos geométricos;
- analizar movimientos en el plano;
- establecer relaciones espaciales;
- justificar propiedades mediante argumentos visuales y deductivos.

Esta orientación representa un cambio sustancial respecto de currículos anteriores, centrados principalmente en la memorización de propiedades y procedimientos geométricos.

Representaciones múltiples y pensamiento geométrico

Otro elemento innovador incorporado por las Bases Curriculares corresponde al uso sistemático de múltiples formas de representación.

Las investigaciones de Duval (1999) demuestran que la comprensión matemática depende de la capacidad para coordinar distintos registros de

representación. En geometría ello implica articular dibujos, modelos físicos, lenguaje verbal, expresiones simbólicas, construcciones dinámicas y representaciones digitales.

En concordancia con estos planteamientos, el currículo chileno promueve el tránsito permanente entre distintos sistemas de representación, favoreciendo una comprensión más profunda de los conceptos geométricos y evitando aprendizajes exclusivamente memorísticos (MINEDUC, 2015; Godino *et al.*, 2022).

Incorporación de tecnologías digitales

Una de las innovaciones más significativas del currículo chileno corresponde a la incorporación explícita de tecnologías digitales como herramientas para favorecer el aprendizaje de la geometría.

Los programas de estudio recomiendan el empleo de software de geometría dinámica — particularmente GeoGebra — para facilitar procesos de exploración, formulación de conjeturas, experimentación y validación matemática (MINEDUC, 2015, 2019).

Esta orientación coincide con abundante evidencia internacional que demuestra que los ambientes dinámicos favorecen:

- el desarrollo del pensamiento espacial;
- la comprensión de transformaciones geométricas;
- la formulación de conjeturas;
- la argumentación matemática;
- la transición hacia la demostración formal (Sinclair *et al.*, 2023; Clements & Sarama, 2020).

Más recientemente, la irrupción de la inteligencia artificial generativa abre nuevas posibilidades para enriquecer estos procesos mediante asistentes inteligentes, sistemas de retroalimentación automática, visualizaciones dinámicas y analítica del aprendizaje, configurando un escenario de profunda transformación para la enseñanza de la geometría (Holmes *et al.*, 2022; UNESCO, 2021).

La actualización curricular de 2019

La actualización curricular de tercero y cuarto año de Educación Media constituye otro hito importante dentro de la evolución de la enseñanza de la geometría en Chile.

El nuevo currículo incorpora asignaturas electivas destinadas a profundizar conocimientos matemáticos específicos, entre ellas:

- Geometría Euclidiana: Profundización en demostraciones, construcciones y razonamiento formal.
- Geometría 3D y Modelación Espacial: Aplicación de herramientas digitales, modelado de cuerpos tridimensionales y resolución de problemas del mundo real.

Estas asignaturas buscan fortalecer competencias relacionadas con:

- razonamiento deductivo;
- construcción de demostraciones;
- modelación tridimensional;
- utilización de tecnologías digitales;
- resolución de problemas contextualizados.

Desde una perspectiva epistemológica, esta reorganización curricular reconoce que la geometría constituye un lenguaje para describir, interpretar y modelar fenómenos físicos, científicos y tecnológicos, ampliando considerablemente el horizonte tradicional de la disciplina (MINEDUC, 2019).

Fundamentos epistemológicos del cambio curricular

Los cambios curriculares recientes en geometría se sustentan en varios principios clave:

- Desarrollo de competencias del siglo XXI: La geometría es vista como una herramienta para la resolución de problemas, la visualización espacial y el pensamiento lógico.

- Aprendizaje basado en habilidades más que en contenidos aislados: Se busca que los estudiantes puedan aplicar lo aprendido en contextos variados, más allá de memorizar fórmulas.
- Aportes de la didáctica de las matemáticas: El currículo refleja influencias de teorías como la de los registros de representación semiótica (Duval), la teoría de la visualización (Arcavi), y el enfoque de resolución de problemas.
- Inclusión y equidad: Se promueve una enseñanza de la geometría más accesible, visual y manipulativa, especialmente en los primeros años, para atender a la diversidad del estudiantado.

El rediseño curricular chileno se sustenta en diversas perspectivas contemporáneas de la Educación Matemática.

Entre ellas destacan:

a) Constructivismo

El aprendizaje geométrico se entiende como un proceso activo de construcción de significados, donde el estudiante reorganiza progresivamente sus esquemas cognitivos mediante la resolución de problemas y la interacción con diferentes representaciones (Piaget & Inhelder, 1967; Clements & Sarama, 2020).

b) Perspectiva sociocultural

Desde la teoría sociocultural, el conocimiento matemático emerge a través de procesos colectivos de comunicación, argumentación y negociación de significados (Vygotsky, 1978; Radford, 2018).

c) Teoría de los registros de representación

Duval (1999) sostiene que comprender geometría requiere coordinar diversos registros semióticos y realizar conversiones entre ellos, aspecto que se refleja explícitamente en las Bases Curriculares chilenas.

d) Pensamiento visual

Arcavi (2003) plantea que la visualización constituye un componente esencial del pensamiento matemático, favoreciendo procesos de exploración, formulación de hipótesis y comprensión conceptual.

e) Competencias para el siglo XXI

La OECD (2023) y la UNESCO (2021) enfatizan que la educación matemática debe desarrollar competencias como creatividad, pensamiento crítico, colaboración, alfabetización digital y resolución de problemas complejos, todas ellas presentes en la actual orientación curricular chilena.

Desafíos para la implementación

Pese a los diversos e importantes avances alcanzados en el diseño curricular, la literatura especializada coincide en que su implementación enfrenta importantes desafíos.

Entre ellos destacan:

- desigualdad en la formación inicial del profesorado;
- limitada actualización profesional en didáctica de la geometría;
- escasa disponibilidad de tecnologías digitales en numerosos establecimientos;
- persistencia de prácticas tradicionales de enseñanza;
- sistemas de evaluación que continúan privilegiando aprendizajes procedimentales.

Diversos informes internacionales señalan que la efectividad de una reforma curricular depende menos del documento oficial y más de la capacidad de los docentes para apropiarse de sus fundamentos pedagógicos y traducirlos en experiencias significativas de aprendizaje (OECD, 2023; UNESCO, 2021).

Asimismo, la incorporación de tecnologías digitales requiere programas sistemáticos de formación continua que permitan desarrollar competencias profesionales acordes con los desafíos de la educación matemática contemporánea (Holmes *et al.*, 2022).

Análisis crítico

Las transformaciones curriculares implementadas en Chile representan uno de los procesos más importantes de renovación de la enseñanza de la geometría en América Latina durante las últimas dos décadas. El currículo vigente evidencia una convergencia significativa con las principales tendencias internacionales en Educación Matemática, incorporando enfoques centrados en el razonamiento, la visualización, la modelación y la argumentación.

No obstante, la evidencia muestra que las reformas curriculares, por sí solas, no garantizan cambios sustantivos en las prácticas de aula. Su impacto depende de la existencia de políticas integrales que articulen currículo, evaluación, formación inicial y continua del profesorado, investigación educativa y disponibilidad de recursos didácticos.

En este escenario, la incorporación de tecnologías emergentes e inteligencia artificial plantea nuevas oportunidades para fortalecer la enseñanza de la geometría mediante ambientes de aprendizaje más interactivos, personalizados y orientados al desarrollo del pensamiento matemático. Sin embargo, estos avances deberán implementarse desde una perspectiva ética, inclusiva y pedagógicamente fundamentada, en consonancia con la Recomendación sobre la Ética de la Inteligencia Artificial de la UNESCO (2021).

Análisis final de la sección

Los cambios curriculares recientes reflejan un esfuerzo sostenido por actualizar la enseñanza de la geometría en Chile, en línea con tendencias internacionales y con aportes de la investigación didáctica. Sin embargo, el impacto real de estas reformas dependerá de su apropiación por parte de los docentes, la coherencia entre evaluación, currículo y formación, y la creación de condiciones materiales y pedagógicas que permitan una enseñanza más activa, visual y significativa.

TENSIONES ENTRE INVESTIGACIÓN, CURRÍCULO Y AULA

A pesar de los importantes avances registrados en la investigación en didáctica de la geometría y de las transformaciones curriculares impulsadas por el Ministerio de Educación de Chile durante las últimas décadas, continúa existiendo una brecha significativa entre el conocimiento científico producido por la comunidad académica, las orientaciones establecidas en el currículo oficial y las prácticas desarrolladas cotidianamente en las aulas escolares. Esta desarticulación constituye uno de los principales desafíos para la consolidación de una enseñanza de la geometría orientada al desarrollo del razonamiento, la visualización y la argumentación matemática (UNESCO, 2021; OECD, 2023; Godino *et al.*, 2022).

Diversos estudios internacionales coinciden en señalar que las reformas curriculares producen transformaciones limitadas cuando no van acompañadas de procesos sistemáticos de desarrollo profesional docente, políticas de acompañamiento pedagógico y mecanismos eficaces de transferencia del conocimiento generado por la investigación educativa hacia la práctica escolar (Fullan, 2020; Darling-Hammond, Hyler, & Gardner, 2017). En consecuencia, comprender las tensiones existentes entre investigación, currículo y aula resulta indispensable para interpretar las dificultades que enfrenta actualmente la enseñanza de la geometría en Chile.

La distancia entre investigación y práctica pedagógica

Uno de los principales problemas identificados es que los resultados de la investigación en didáctica de la geometría — como los aportes sobre visualización, registros de representación, razonamiento espacial o enseñanza de la demostración — no siempre son conocidos ni utilizados por docentes en ejercicio. Las investigaciones suelen circular en espacios académicos restringidos (revistas especializadas, congresos) y no se traducen en materiales didácticos accesibles o programas de formación docente continua.

Aunque durante las últimas dos décadas, la producción científica sobre visualización matemática, razonamiento espacial, registros de re-

presentación semiótica, demostración y tecnologías digitales ha crecido de manera significativa, estos avances permanecen, en muchos casos, circunscritos al ámbito universitario y a revistas especializadas, con escasa incidencia en la enseñanza cotidiana (Godino *et al.*, 2022; Sinclair *et al.*, 2023).

La teoría de la difusión de innovaciones propuesta por Rogers (2003) permite comprender esta situación al señalar que la generación de conocimiento no garantiza por sí misma su incorporación en las prácticas profesionales. Para que una innovación educativa sea adoptada, debe existir una mediación institucional que facilite procesos de apropiación, adaptación y acompañamiento. En el ámbito de la Educación Matemática, ello implica traducir los resultados de la investigación en orientaciones curriculares, recursos didácticos, programas de formación y comunidades profesionales de aprendizaje.

En Chile, diversos estudios han mostrado que muchos docentes continúan desarrollando una enseñanza centrada en la exposición de definiciones, la aplicación rutinaria de procedimientos y la resolución mecánica de ejercicios, reproduciendo modelos tradicionales de enseñanza que limitan el desarrollo del pensamiento geométrico (Radford, 2018; Clements & Sarama, 2020). Esta situación refleja la persistencia de una brecha entre el conocimiento didáctico disponible y las prácticas efectivamente implementadas en las aulas.

Currículo prescrito versus currículo implementado

Desde una perspectiva de la teoría curricular, resulta pertinente distinguir entre el currículo prescrito, expresado en los documentos oficiales, y el currículo implementado, correspondiente a las experiencias reales desarrolladas por los docentes (Goodlad, 1979; Sacristán, 2013).

Las Bases Curriculares chilenas promueven explícitamente el desarrollo de habilidades como la visualización, la representación, la argumentación y la modelación matemática (MINEDUC, 2012, 2015, 2019). Sin embargo, investigaciones recientes muestran que estas orientacio-

nes no siempre logran materializarse en las prácticas escolares debido a múltiples condicionantes institucionales y pedagógicos.

Entre los factores más relevantes se encuentran:

- Falta de tiempo: La presión por cumplir con todos los objetivos de aprendizaje lleva a muchos docentes a privilegiar procedimientos rápidos por sobre la comprensión profunda.
- Preparación para evaluaciones estandarizadas: Las pruebas como la PAES tienden a reforzar una visión reduccionista de la geometría, basada en ejercicios aislados y descontextualizados.
- Escasos recursos didácticos: Muchas escuelas no cuentan con materiales concretos, acceso a tecnología o recursos visuales de calidad para apoyar el aprendizaje geométrico.

Como consecuencia, muchas experiencias de enseñanza continúan privilegiando procedimientos rutinarios y ejercicios de aplicación inmediata, relegando actividades orientadas a la formulación de conjeturas, la exploración dinámica y la argumentación matemática (OECD, 2023; UNESCO, 2021).

La formación inicial y continua del profesorado

La literatura especializada coincide en señalar que la formación del profesorado constituye uno de los factores con mayor impacto sobre la calidad de la enseñanza de la geometría (Darling-Hammond *et al.*, 2017; Ball, Thames, & Phelps, 2008).

En Chile, la formación inicial presenta importantes diferencias entre instituciones de educación superior respecto de la profundidad con que se aborda la didáctica específica de la geometría. En numerosos programas de Pedagogía en Matemática, los cursos continúan privilegiando contenidos disciplinares por sobre el análisis de procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación. Las universidades chilenas aún muestran grandes diferencias en la calidad y profundidad de la formación inicial en didáctica de la geometría. En muchos programas de pedagogía, el estudio de la geome-

tría se limita a cursos teóricos sin conexión con la realidad escolar ni con enfoques didácticos actuales.

Asimismo, la formación continua ofrecida por el Estado o por instituciones privadas, rara vez aborda la geometría en profundidad. En general, la didáctica de la geometría ocupa un lugar marginal frente a otros contenidos considerados “más evaluados” o “más urgentes”.

Desde la perspectiva del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher’s Specialized Knowledge), resulta indispensable que los futuros docentes desarrollen competencias relacionadas con:

- comprensión epistemológica de la geometría;
- conocimiento didáctico del contenido;
- análisis de errores y dificultades de aprendizaje;
- uso pedagógico de tecnologías digitales;
- diseño de tareas de visualización y argumentación;
- evaluación del razonamiento geométrico.

Investigaciones recientes destacan que el desarrollo profesional docente debe entenderse como un proceso continuo de reflexión e innovación, articulado con comunidades de aprendizaje profesional y proyectos colaborativos entre universidades y escuelas (Liljedahl, 2021; Godino *et al.*, 2022).

La evaluación como fuente de tensión

Uno de los aspectos más críticos identificados por la literatura corresponde a la escasa coherencia entre los enfoques curriculares y los sistemas de evaluación.

Las Bases Curriculares promueven habilidades complejas relacionadas con la argumentación, la comunicación matemática, la representación y la modelación. Sin embargo, gran parte de las evaluaciones externas continúan privilegiando ejercicios cerrados, respuestas únicas y procedimientos algorítmicos, limitando las oportunidades para valorar procesos de razonamiento geométrico (Black & Wiliam, 2009; OECD, 2023).

Esta situación genera una paradoja ampliamente descrita por la investigación educativa: mientras el currículo propone una enseñanza centrada en competencias, la evaluación tiende a favorecer aprendizajes reproductivos. Como consecuencia, numerosos docentes priorizan estrategias orientadas a mejorar resultados en pruebas estandarizadas, reduciendo el tiempo destinado a actividades de exploración, demostración y resolución de problemas abiertos.

La evaluación formativa aparece, en este contexto, como una alternativa que permite recoger evidencias permanentes del aprendizaje, retroalimentar oportunamente a los estudiantes y promover procesos de autorregulación del pensamiento matemático (Heritage, 2010; Black & Wiliam, 2009).

Cultura escolar y resistencia al cambio

Las transformaciones curriculares no dependen exclusivamente de la calidad técnica de los documentos oficiales, sino también de la cultura profesional existente en los establecimientos educativos.

Fullan (2020) sostiene que toda innovación enfrenta procesos de resistencia derivados de creencias, rutinas y prácticas consolidadas a lo largo del tiempo. En el caso de la enseñanza de la geometría, dichas resistencias pueden observarse en:

- predominio de clases expositivas;
- énfasis excesivo en la memorización de definiciones;
- escaso uso de recursos manipulativos;
- baja incorporación de tecnologías digitales;
- limitada colaboración entre docentes.

A ello se agregan las expectativas de estudiantes y familias, quienes frecuentemente identifican el aprendizaje matemático con la adquisición de procedimientos mecánicos más que con el desarrollo del razonamiento y la comprensión conceptual.

La literatura sobre cambio educativo señala que la innovación sostenible requiere liderazgo pedagógico, trabajo colaborativo, comunidades profesionales de aprendizaje y políticas institucionales de apoyo permanente (Hargreaves & O'Connor, 2018; Fullan, 2020).

Nuevos desafíos: inteligencia artificial y enseñanza de la geometría

Durante los últimos años ha emergido un nuevo escenario asociado a la incorporación de la inteligencia artificial en Educación Matemática.

Herramientas basadas en inteligencia artificial generativa, analítica del aprendizaje y sistemas tutoriales inteligentes ofrecen nuevas posibilidades para fortalecer procesos de visualización, construcción de representaciones dinámicas, retroalimentación personalizada y evaluación continua del aprendizaje geométrico (Holmes *et al.*, 2022; UNESCO, 2021; Silva, 2026).

No obstante, la integración de estas tecnologías también plantea desafíos relacionados con:

- ética y uso responsable de la inteligencia artificial;
- protección de datos personales;
- desarrollo del pensamiento crítico;
- formación digital del profesorado;
- equidad en el acceso a tecnologías;
- redefinición del papel del docente.

En este contexto, la inteligencia artificial no debe entenderse como un sustituto del profesor, sino como una herramienta que amplía las posibilidades de mediación pedagógica y favorece procesos de aprendizaje más personalizados, colaborativos y reflexivos. Esta perspectiva resulta coherente con los modelos emergentes de Educación Matemática Digital y con los recientes desarrollos sobre inteligencia artificial educativa (Lutkin, 2024; Holmes *et al.*, 2022; UNESCO, 2021).

Análisis integrador

El análisis precedente evidencia que las tensiones entre investigación, currículo y práctica docente poseen un carácter sistémico y no pueden explicarse únicamente por decisiones individuales del profesorado. Se trata de un fenómeno complejo donde convergen factores curriculares, institucionales, culturales, tecnológicos y políticos.

La superación de estas tensiones requiere avanzar hacia un modelo de articulación permanente entre universidades, centros de investigación, Ministerio de Educación, establecimientos escolares y comunidades profesionales de aprendizaje. Asimismo, resulta indispensable fortalecer la formación inicial y continua del profesorado, promover evaluaciones coherentes con el currículo vigente y favorecer la incorporación crítica de tecnologías digitales e inteligencia artificial en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En síntesis, la transformación efectiva de la enseñanza de la geometría dependerá de la capacidad del sistema educativo para integrar el conocimiento científico producido por la investigación con las decisiones curriculares y las prácticas pedagógicas, construyendo una cultura profesional basada en la innovación, la colaboración y la mejora continua. Esta articulación constituye una condición esencial para responder a los desafíos de la educación matemática del siglo XXI y avanzar hacia una enseñanza de la geometría más significativa, equitativa y pertinente.

CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

El análisis desarrollado a lo largo de este capítulo, permite constatar que la enseñanza de la geometría en Chile ha experimentado una transformación significativa durante las últimas décadas. Desde una tradición centrada en el formalismo euclidiano y en la enseñanza de contenidos aislados, el currículo nacional ha evolucionado hacia un enfoque basado en competencias, que reconoce la importancia del razonamiento, la visualización, la representación, la modelación y la argumentación como componentes

esenciales del pensamiento matemático (Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC], 2012, 2015, 2019; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014). Este cambio curricular se encuentra en consonancia con las principales tendencias internacionales en Educación Matemática y con las recomendaciones formuladas por organismos como la UNESCO (2021) y la OECD (2023), que promueven una enseñanza orientada al desarrollo de competencias para el siglo XXI.

Sin embargo, el recorrido histórico evidencia que las transformaciones curriculares no siempre han sido acompañadas por cambios equivalentes en las prácticas pedagógicas. Persisten brechas entre las orientaciones oficiales, la formación inicial y continua del profesorado, los sistemas de evaluación y las condiciones institucionales disponibles en los establecimientos educacionales. Estas tensiones limitan la implementación efectiva de propuestas didácticas innovadoras y reducen el impacto potencial de los avances alcanzados por la investigación en didáctica de la geometría (Darling-Hammond *et al.*, 2017; Fullan, 2020; Godino *et al.*, 2022).

Desde la perspectiva de la investigación educativa, puede afirmarse que Chile ha consolidado progresivamente una comunidad académica interesada en comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Las investigaciones desarrolladas durante las últimas décadas han permitido profundizar el conocimiento sobre la visualización matemática, el razonamiento espacial, la argumentación, la demostración, el uso de tecnologías digitales y la formación del profesorado. No obstante, uno de los principales desafíos continúa siendo la transferencia efectiva de estos conocimientos hacia las políticas públicas, los programas de formación docente y las prácticas desarrolladas en el aula (Sinclair *et al.*, 2023; Fujita & Jones, 2020).

La evidencia internacional demuestra que la mejora de la enseñanza de la geometría depende de una articulación permanente entre investigación, currículo, evaluación y desarrollo profesional docente. En consecuencia, no resulta suficiente actualizar los documentos curriculares si estas modificaciones no van acompañadas de estrategias sistemáticas de forma-

ción continua, acompañamiento pedagógico, producción de recursos didácticos y fortalecimiento de comunidades profesionales de aprendizaje (OECD, 2023; UNESCO, 2021).

Asimismo, la evolución reciente de las tecnologías digitales abre nuevas posibilidades para enriquecer la enseñanza de la geometría. La incorporación de ambientes de geometría dinámica, plataformas digitales e inteligencia artificial permite ampliar las oportunidades de exploración, representación, visualización y retroalimentación personalizada, favoreciendo procesos de aprendizaje más activos y significativos. Sin embargo, su integración debe sustentarse en principios éticos, pedagógicos y epistemológicos que garanticen un uso responsable de estas tecnologías y fortalezcan, antes que sustituyan, el papel del profesorado como mediador del aprendizaje (Holmes *et al.*, 2022; UNESCO, 2021).

Proyecciones para la investigación

La revisión realizada permite identificar diversas líneas prioritarias para futuras investigaciones en didáctica de la geometría.

En primer lugar, resulta necesario profundizar el estudio de los procesos de visualización matemática y razonamiento espacial en contextos escolares diversos, particularmente considerando las desigualdades territoriales presentes en el sistema educativo chileno.

En segundo término, se requiere ampliar las investigaciones relacionadas con la formación inicial y continua del profesorado, analizando las competencias necesarias para enseñar geometría en escenarios caracterizados por la creciente incorporación de tecnologías digitales e inteligencia artificial.

Una tercera línea de investigación corresponde al desarrollo de modelos de evaluación que permitan valorar procesos complejos de razonamiento, argumentación, modelación y comunicación matemática, superando los enfoques centrados exclusivamente en respuestas correctas o procedimientos rutinarios.

Finalmente, emerge como un campo especialmente promisorio el estudio de las interacciones entre inteligencia artificial, analítica del aprendizaje y enseñanza de la geometría, explorando nuevas formas de personalización del aprendizaje, retroalimentación automática y generación de ambientes inteligentes para el desarrollo del pensamiento matemático (Holmes *et al.*, 2022; Luckin, 2024).

Implicancias para las políticas educativas

Desde la perspectiva de la política pública, los resultados de este análisis permiten formular diversas recomendaciones orientadas al fortalecimiento de la enseñanza de la geometría en Chile.

En primer lugar, resulta indispensable consolidar una política nacional de formación docente que otorgue mayor protagonismo a la didáctica específica de la geometría, integrando conocimientos disciplinares, pedagógicos y tecnológicos.

En segundo lugar, se recomienda fortalecer los mecanismos de vinculación entre universidades, centros de investigación, establecimientos escolares y organismos responsables del diseño curricular, favoreciendo procesos permanentes de transferencia del conocimiento científico hacia la práctica educativa.

Asimismo, se hace necesario avanzar hacia sistemas de evaluación coherentes con los principios establecidos en las Bases Curriculares, incorporando tareas que promuevan la argumentación, la representación, la resolución de problemas y la modelación matemática.

Finalmente, resulta prioritario garantizar condiciones de equidad en el acceso a recursos tecnológicos, software especializado y conectividad digital, permitiendo que todos los estudiantes puedan beneficiarse de las oportunidades que ofrecen las nuevas tecnologías para el aprendizaje de la geometría (MINEDUC, 2019; OECD, 2023).

Implicancias para la formación del profesorado

La transformación de la enseñanza de la geometría exige fortalecer tanto la formación inicial como el desarrollo profesional continuo del profesorado.

En este sentido, los programas universitarios deberían incorporar de manera más sistemática contenidos relacionados con:

- visualización matemática;
- razonamiento espacial;
- argumentación y demostración;
- tecnologías digitales;
- GeoGebra y geometría dinámica;
- inteligencia artificial aplicada a la Educación Matemática;
- evaluación auténtica del aprendizaje geométrico.

Igualmente, resulta pertinente promover modalidades de formación basadas en comunidades profesionales de aprendizaje, investigación-acción, análisis colaborativo de clases y reflexión sobre la práctica docente, favoreciendo una cultura de innovación permanente (Hargreaves & O'Connor, 2018; Darling-Hammond *et al.*, 2017).

Una mirada prospectiva

La enseñanza de la geometría enfrenta actualmente un escenario de profundas transformaciones asociado a la revolución digital y al desarrollo de la inteligencia artificial. Estas innovaciones no modifican únicamente las herramientas disponibles para enseñar, sino que también replantean la naturaleza misma del aprendizaje matemático, las formas de representación del conocimiento y el papel del docente como diseñador de experiencias de aprendizaje.

En este contexto, la geometría puede convertirse en uno de los espacios privilegiados para desarrollar competencias vinculadas con la creatividad, el pensamiento crítico, la resolución de problemas complejos, la

modelación y la alfabetización digital. Su naturaleza visual y espacial la sitúa en una posición estratégica para integrar tecnologías emergentes, ambientes inmersivos e inteligencia artificial, favoreciendo procesos de aprendizaje altamente interactivos y contextualizados.

Desde esta perspectiva, el futuro de la enseñanza de la geometría en Chile dependerá de la capacidad del sistema educativo para construir un ecosistema articulado entre investigación científica, innovación curricular, desarrollo profesional docente y transformación digital. Solo mediante esta integración será posible avanzar hacia una educación matemática que responda a las demandas de la sociedad contemporánea y contribuya efectivamente a la formación de ciudadanos capaces de comprender, interpretar y transformar el mundo mediante el pensamiento matemático.

Cierre

La enseñanza de la geometría constituye mucho más que un conjunto de contenidos escolares: representa un espacio privilegiado para el desarrollo del pensamiento espacial, la argumentación, la creatividad y la comprensión del entorno. La evidencia analizada en este capítulo muestra que Chile dispone hoy de avances curriculares, investigaciones especializadas y experiencias pedagógicas que configuran una base sólida para continuar fortaleciendo este campo, donde se destaca:

- Revalorización curricular de la geometría: El currículo actual reconoce el valor formativo de la geometría, no solo como un conjunto de contenidos, sino como una vía para desarrollar habilidades de razonamiento, visualización y representación.
- Impacto parcial de la investigación: A pesar del crecimiento de la investigación nacional en didáctica de la geometría, su influencia en las prácticas docentes sigue siendo limitada, en gran parte por la falta de formación específica y de articulación entre universidad, escuela y política educativa.
- Persistencia de tensiones estructurales: La implementación efectiva del currículo se ve dificultada por la escasa formación con-

tinua, la presión de las evaluaciones estandarizadas y una cultura escolar que sigue priorizando el enfoque procedimental.

- Emergencia de buenas prácticas locales: Diversas experiencias demuestran que, con estrategias didácticas adecuadas, apoyo institucional y uso intencionado de la tecnología, es posible transformar la enseñanza de la geometría en experiencias significativas y motivadoras para los estudiantes.

Tabla resumen: Buenas prácticas en la enseñanza de la geometría en Chile

Revalorización curricular de la geometría: El currículo actual reconoce el valor formativo de la geometría, no solo como un conjunto de contenidos, sino como una vía para desarrollar habilidades de razonamiento, visualización y representación.

Impacto parcial de la investigación: A pesar del crecimiento de la investigación nacional en didáctica de la geometría, su influencia en las prácticas docentes sigue siendo limitada, en gran parte por la falta de formación específica y de articulación entre universidad, escuela y política educativa.

Persistencia de tensiones estructurales: La implementación efectiva del currículo se ve dificultada por la escasa formación continua, la presión de las evaluaciones estandarizadas y una cultura escolar que sigue priorizando el enfoque procedimental.

Emergencia de buenas prácticas locales: Diversas experiencias demuestran que, con estrategias didácticas adecuadas, apoyo institucional y uso intencionado de la tecnología, es posible transformar la enseñanza de la geometría en experiencias significativas y motivadoras para los estudiantes.

Tabla resumen: Buenas prácticas en la enseñanza de la geometría en Chile

Experiencia	Estrategias clave	Niveles educativos	Resultados observados
GeoGebra en liceos rurales (Región de Los Ríos)	- Uso de software dinámico - Visualización de transformaciones - Trabajo colaborativo	7° básico a 2° medio	- Mejora en comprensión espacial - Mayor participación estudiantil
Taller en liceos técnicos (Santiago) - Problemas aplicados al mundo laboral	- Uso de materiales concretos - Argumentación oral y escrita	2° y 3° medio técnico	- Fortalecimiento del razonamiento geométrico - Mayor vínculo con asignaturas técnicas
Formación docente (PUCV)	- Talleres con tecnologías y manipulativos - Aplicación de teorías didácticas - Proyectos de aula supervisados	Educación básica y media	- Uso más preciso del lenguaje geométrico - Mejora en representación y modelado
Proyecto interdisciplinario STEM (Antofagasta)	- Diseño urbano con base geométrica - Escalas, simetría y modelación 3D - Presentación pública de resultados	1° medio	- Aprendizaje situado y contextualizado - Integración entre disciplinas

No obstante, la consolidación de una enseñanza de la geometría pertinente para el siglo XXI requiere superar la tradicional fragmentación entre investigación, currículo y práctica docente. Solo una articulación efectiva entre universidades, escuelas, organismos públicos y comunidades profesionales permitirá transformar el conocimiento científico en experiencias de aprendizaje significativas, inclusivas e innovadoras.

En este horizonte, la integración crítica de tecnologías digitales y de inteligencia artificial, sustentada en principios éticos, pedagógicos y científicos, constituye una oportunidad para renovar la enseñanza de la geometría y proyectarla hacia los desafíos educativos del futuro, reafirmando su papel como uno de los pilares fundamentales de la Educación Matemática contemporánea.

REFERÊNCIAS

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843–908). Information Age Publishing.
- Bishop, A. J. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 21(1), 5–31.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2020). *Learning and teaching early math* (3rd ed.). Routledge.
- Cox, C. (2003). *Políticas educacionales en el cambio de siglo: La reforma del sistema escolar de Chile*. Editorial Universitaria.
- Darling-Hammond, L., Hyler, M. E., & Gardner, M. (2017). *Effective teacher professional development*. Learning Policy Institute.
- de Villiers, M. (2021). Rethinking proof in geometry education. *Learning and Teaching Mathematics*, 30, 8–16.
- Duval, R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking*. Basic Issues for Learning.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Fullan, M. (2020). *Leading in a culture of change* (2nd ed.). Jossey-Bass.
- Fujita, T., & Jones, K. (2020). Geometry education research: Current trends and future directions. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2nd ed.). Springer.

- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2022). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada.
- Goodlad, J. I. (1979). Curriculum inquiry. McGraw-Hill.
- Hargreaves, A., & O'Connor, M. T. (2018). Collaborative professionalism. Corwin.
- Heritage, M. (2010). Formative assessment. Corwin.
- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2022). Artificial intelligence in education: Promises and implications for teaching and learning (Updated ed.). Center for Curriculum Redesign.
- Jones, K., & Fujita, T. (2020). Geometry education. En S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (2nd ed.). Springer.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. National Academies Press.
- Liljedahl, P. (2021). Building thinking classrooms in mathematics. Corwin.
- Luckin, R. (2024). AI for schoolteachers (2nd ed.). Routledge.
- Mariotti, M. A. (2022). Proof and proving in mathematics education. En Encyclopedia of Mathematics Education (2nd ed.). Springer.
- Ministerio de Educación de Chile. (1996). Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios para la Educación Básica. MINEDUC.
- Ministerio de Educación de Chile. (1998). Marco curricular de Educación Básica. MINEDUC.
- Ministerio de Educación de Chile. (2012). Bases Curriculares. Matemática. Educación Básica. MINEDUC.
- Ministerio de Educación de Chile. (2013). Programa de estudio Matemática Educación Básica. MINEDUC.
- Ministerio de Educación de Chile. (2015). Bases Curriculares. Matemática. 7° Básico a 2° Medio. MINEDUC.
- Ministerio de Educación de Chile. (2016). Orientaciones para la implementación curricular. MINEDUC.
- Ministerio de Educación de Chile. (2019). Bases Curriculares 3° y 4° Medio. MINEDUC.

- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). Principles to actions: Ensuring mathematical success for all. NCTM.
- OECD. (2023). PISA 2022 Results (Volume I): The state of learning and equity in education. OECD Publishing.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1967). The child's conception of space. Norton.
- Radford, L. (2018). The theory of objectification. Brill.
- Rogers, E. M. (2003). Diffusion of innovations (5th ed.). Free Press.
- Sacristán, J. G. (2013). En busca del sentido de la educación. Morata.
- Silva Córdova, C. (2026). Modelo Evaluativo en Educación Matemática Mediado por Inteligencia Artificial (ME-IAEM). ISBN: 978-956-03-0580-0. Chile.
- Sinclair, N., de Villiers, M., & Kaiser, G. (Eds.). (2023). Recent research on geometry education. Springer.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2018). Teaching and learning proof. Routledge.
- UNESCO. (2021). Recommendation on the Ethics of Artificial Intelligence. UNESCO.
- UNESCO. (2023). Global Education Monitoring Report 2023: Technology in education – A tool on whose terms? UNESCO.
- Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. Academic Press.

CAPÍTULO 5

O ensino da Geometria na América Latina: desenvolvimento do pensamento geométrico, evidências empíricas e desafios contemporâneos

Diana Carolina Pérez Duarte
Luis Fernando Pérez Duarte

Resumo: Este capítulo analisa criticamente o ensino da geometria na América Latina, enfatizando o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da articulação entre visualização, construção e demonstração. Com base em investigações desenvolvidas na Universidad Antonio Nariño e em revisão teórica, identificam-se avanços na compreensão dos processos cognitivos e limitações como a fragmentação curricular e a fraca articulação entre teoria e prática. Apresentam-se evidências empíricas e propõe-se um modelo teórico-prático para fortalecer a aprendizagem geométrica na região.

Palavras-chave: Ensino de geometria. Pensamento geométrico. Visualização. Demonstração. Educação matemática. América Latina.

Resumen: Este capítulo analiza críticamente la enseñanza de la geometría en América Latina, destacando el desarrollo del pensamiento geométrico mediante la articulación entre visualización, construcción y demostración. A partir de investigaciones desarrolladas en la Universidad Antonio Nariño y de una revisión teórica, se identifican avances en la comprensión de los procesos cognitivos, así como limitaciones asociadas a la fragmentación curricular y a la débil relación entre teoría y práctica. Finalmente, se propone un modelo teórico–empírico orientado al fortalecimiento del aprendizaje geométrico en distintos niveles educativos.

Palabras-clave: Geometría. Pensamiento geométrico. Visualización. Demostración. Educación matemática. América Latina.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la geometría ha experimentado un crecimiento significativo en la producción académica en las últimas décadas, tanto en América Latina como a nivel internacional. Este campo de investigación se ha consolidado mediante el estudio de diversos niveles educativos, enfoques pedagógicos y contextos socioculturales.

Autores como Duval (1999) han resaltado la importancia de las representaciones semióticas en la comprensión geométrica, indicando que una de las barreras más importantes para el aprendizaje es la dificultad para conciliar distintos tipos de representación. En un sentido complementario, Piaget y Inhelder (1993) contribuyen con una visión del desarrollo cognitivo que facilita la comprensión de cómo los estudiantes construyen su pensamiento espacial de manera progresiva.

La producción académica ha resaltado, en el escenario de América Latina, lo importante que es dejar atrás las tradiciones enfocadas en la memorización y progresar hacia posturas que incorporen la argumentación, la visualización y la solución de problemas. La enseñanza de las matemáticas se ha replanteado gracias a investigadores como Cantoral (2013), Batanero (2013) y Godino (2002), quienes han aportado perspectivas más significativas y contextualizadas.

En este marco, la enseñanza de la geometría en América Latina se configura como un campo que articula distintos niveles educativos, diversas modalidades y múltiples realidades pedagógicas. El presente capítulo se inscribe en esta línea, proponiendo un análisis crítico de la enseñanza de la geometría a partir de investigaciones recientes, con especial énfasis en los aportes desarrollados en la Universidad Antonio Nariño. Se propone un modelo teórico – empírico que contribuya a fortalecer el desarrollo del pensamiento geométrico a partir de evidencia investigativa.

LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN AMÉRICA LATINA: UNA MIRADA DESDE LA INVESTIGACIÓN

Según la literatura en educación matemática, el método de enseñanza de la geometría en América Latina se ha caracterizado por un enfoque que prioriza lo procedimental, es decir, la memorización de definiciones y la utilización de algoritmos; esto restringe el Desarrollo del pensamiento geométrico (Schoenfeld, 1992).

La situación actual de la enseñanza de las matemáticas en Colombia ha estado ligada a los Lineamientos curriculares desarrollado por el MEM (Ministerio de Educación Nacional), donde ofrecen orientaciones epistemológicas, pedagógicas, y curriculares para que las Instituciones Educativas se orienten en la creación de sus propios planes de estudio. Se ha evidenciado que las propuestas curriculares establecidas por la mayoría de las instituciones educativas se establecen teniendo en cuenta el tipo de pensamiento que se quiere desarrollar, con base a ciertos contenidos matemáticos estipulados para cada grado académico.

En la medida que las sociedades miden los desempeños en matemáticas de sus estudiantes, en escuelas y universidades (en Colombia las pruebas Saber, internacionalmente prueba como TIMSS y PISA), se puede apreciar grandes brechas en los resultados. Algunos países, como Singapur, Rusia y otros, ya han replanteado sus currículos matemáticos para que sean más retadores, en sintonía con las exigencias de las sociedades de conocimiento y consecuentes con la naturaleza de la matemática y del pensamiento que puede llamarse matemático. Singapur en particular ha mostrado grandes avances en las pruebas internacionales. En Colombia no sólo es el caso que los resultados comparativos a nivel internacional sean deficientes, sino que los resultados frente a lo esperado en las pruebas nacionales también demuestran grandes fallas.

En Colombia, la gran mayoría de las escuelas no cuentan siquiera con libros de texto, que pueden formar a los jóvenes colombianos de manera que su aprendizaje matemático responda a sus anhelos y necesidades y que se formen ciudadanos que pueden ser internacionalmente competitivos.

Con base, a lo anterior, desde la Universidad Antonio Nariño, se viene trabajando una línea de investigación denominado: Incidencia del pensamiento visual en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas. Con el objetivo de contribuir al Desarrollo del pensamiento visual para favorecer el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática, donde se logre un conocimiento robusto de los contenidos matemáticos a través de la resolución de problemas, de esta manera, avanzando en el desarrollo del pensamiento matemático.

A continuación, se indicará las tendencias de investigaciones que se han desarrollado respecto al desarrollo del pensamiento matemático en la línea de la geometría.

La enseñanza de la geometría en Colombia: entre la transformación pedagógica y los nuevos desafíos educativos

En el contexto educativo colombiano, la enseñanza de la geometría ha atravesado un proceso de transformación que responde a cambios en las concepciones pedagógicas y a las demandas de formación de los estudiantes en la actualidad. Tradicionalmente, esta área se abordaba desde una perspectiva centrada en la repetición de procedimientos y la memorización de fórmulas, lo cual limitaba la comprensión profunda de los conceptos (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006). Sin embargo, en las últimas décadas se ha promovido un enfoque más integral, orientado al desarrollo de competencias y habilidades cognitivas.

Una de las tendencias más relevantes es el tránsito hacia una enseñanza basada en el Desarrollo del pensamiento geométrico. Este enfoque busca que los estudiantes no solo adquieran conocimientos, sino que también desarrollen habilidades como la visualización espacial, la argumentación y la resolución de problemas (Godino *et al.*, 2013). En este sentido, el aprendizaje se concibe como un proceso activo en el que el estudiante construye significado a partir de la interacción con su entorno.

De igual manera, la incorporación de tecnologías digitales ha transformado las prácticas de aula. Herramientas como los programas de geometría dinámica permiten representar y manipular objetos geométricos de manera in-

teractiva, favoreciendo la comprensión de relaciones espaciales y propiedades matemáticas (Hohenwarter & Preiner, 2007). Estas herramientas no solo facilitan la enseñanza, sino que también amplían las posibilidades de exploración por parte de los estudiantes.

Otra tendencia importante es la contextualización del aprendizaje. La geometría ha dejado de ser vista como un conjunto de conceptos abstractos para integrarse con situaciones reales, relacionadas con campos como la arquitectura, la ingeniería y el diseño. Este enfoque permite que los estudiantes reconozcan la utilidad del conocimiento geométrico en su vida cotidiana, lo que incrementa su motivación y compromiso (Bishop, 1999).

Tabla 1 – Síntesis de tendencias actuales en la enseñanza de la geometría

Tendencia	Característica	Beneficio pedagógico
Uso de TIC	Software y simuladores	Mejora visualización
Contextualización	Problemas del entorno	Aprendizaje significativo
Metodologías activas	Participación constante	Mayor motivación
Modelo Van Hiele	Enseñanza por niveles	Respeto desarrollo cognitivo
Trabajo colaborativo	Discusión entre pares	Fortalece argumentación
Material manipulativo	Construcción concreta	Facilita comprensión espacial

Fuente: elaboración propia.

Asimismo, las metodologías activas han cobrado protagonismo en la enseñanza de la geometría. Estrategias como el aprendizaje basado en problemas y el trabajo colaborativo promueven la participación activa de los estudiantes y favorecen el desarrollo de habilidades sociales y cognitivas (Díaz-Barriga, 2006). En estos entornos, el error se asume como parte del proceso de aprendizaje, lo que contribuye a una construcción más sólida del conocimiento.

Por otra parte, el modelo de niveles de razonamiento geométrico propuesto por Van Hiele ha tenido una influencia significativa en la didáctica de la geometría. Este modelo plantea que los estudiantes avanzan progresiva-

mente desde una comprensión visual hacia formas más abstractas de razonamiento, lo cual implica la necesidad de adaptar las estrategias pedagógicas a cada nivel de desarrollo (Van Hiele, 1986).

A pesar de estos avances, la enseñanza de la geometría en Colombia se evidencia un tránsito hacia prácticas pedagógicas más activas, visuales y contextualizadas. El estudiante contemporáneo requiere comprender, explorar y aplicar, más allá de memorizar procedimientos. En este sentido, el uso de tecnologías, la resolución de problemas reales y la atención a los niveles de razonamiento geométrico representan avances sustanciales en la didáctica matemática.

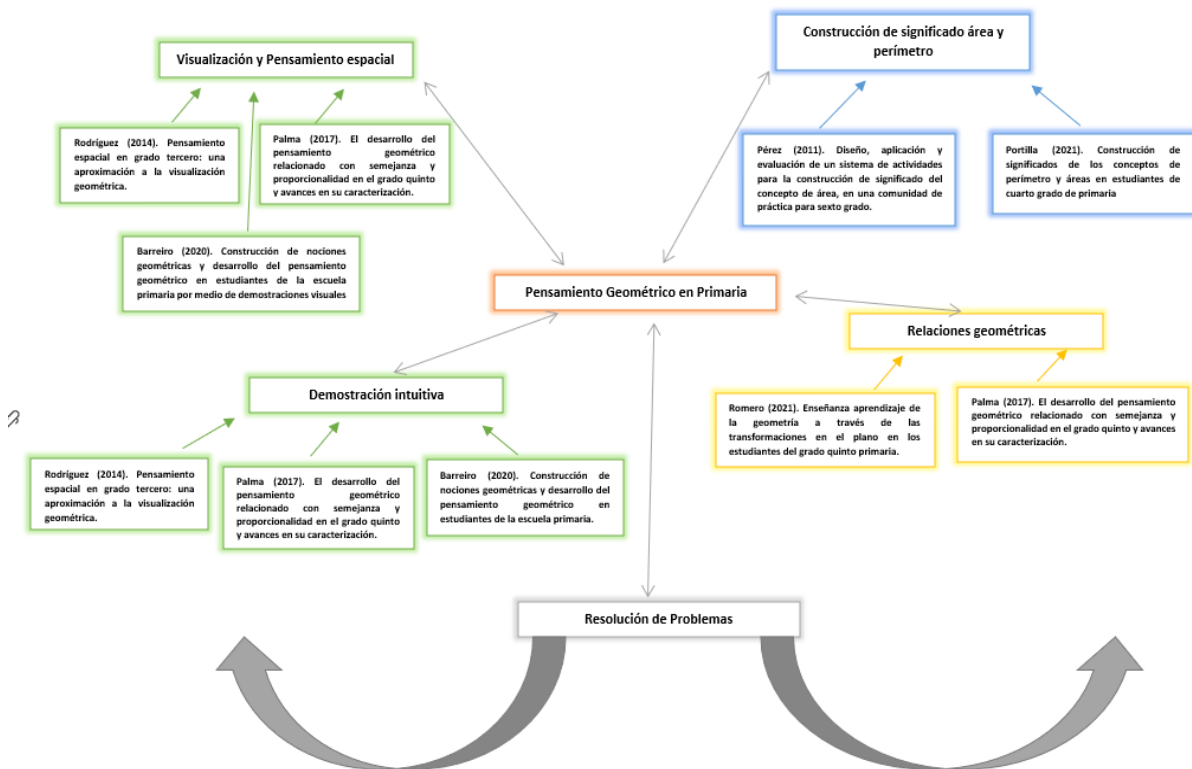
No obstante, el verdadero desafío no radica únicamente en reconocer estas tendencias, sino en lograr que se consoliden de manera efectiva dentro de las instituciones educativas. La geometría posee un enorme potencial para desarrollar pensamiento lógico, creatividad y lectura del espacio; aprovecharlo dependerá de la capacidad del sistema educativo para convertir la innovación en práctica permanente.

Educación Primaria

El Desarrollo del pensamiento geométrico en las fases iniciales de la educación está muy relacionado con el análisis de formas y conexiones espaciales. En esta línea, Clements y Sarama (2009) afirman que la enseñanza de la geometría durante la niñez tiene que fundamentarse en la interacción con objetos y en el desarrollo de significados a partir de vivencias específicas.

A continuación, se indica una red de categorías emergentes, que se obtiene a partir del estudio de investigaciones realizadas en los programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño y enfocadas en la enseñanza de la geometría en el nivel primario, se muestra en la Figura 1. Esta red, que se ha desarrollado a través de un procedimiento de codificación cualitativa, posibilita la identificación no solamente de las categorías más importantes, sino también de las conexiones estructurales entre ellas.

Figura 1 – Red de categorías emergentes del pensamiento geométrico en Educación Primaria



Fuente: elaboración propia a partir de análisis de trabajos de grado programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática Universidad Antonio Nariño

Primero, se nota que el pensamiento geométrico en la etapa de primaria se estructura alrededor de una categoría central con un enfoque experiencial, donde la visualización y el razonamiento espacial son los cimientos del aprendizaje. Esta categoría está muy relacionada con estudios que se ocupan de cómo percibimos, exploramos y representamos objetos geométricos, lo que demuestra que el desarrollo geométrico en este nivel se basa en procesos de percepción e intuición.

En segundo lugar, se destaca la construcción de significado de términos geométricos, especialmente los relacionados con el perímetro y el área, como una categoría fundamental que conecta la experiencia con su formalización. La investigación analizada revela que estos conceptos no se aprenden instantáneamente, sino que necesitan procesos de reconstrucción conceptual gradual, facilitados por actividades diseñadas con un propósito.

Igualmente, la categoría de relaciones geométricas, que abarca transformaciones, semejanza y proporcionalidad, demuestra un progreso hacia formas

de pensamiento más complejas en las que los estudiantes empiezan a establecer vínculos entre las estructuras y propiedades matemáticas. No obstante, este desarrollo no sigue un patrón lineal; depende de las oportunidades de aprendizaje que se ofrecen en el salón de clases.

Por otro lado, el hecho de que la demostración intuitiva sea una categoría emergente indica que en la educación primaria la argumentación matemática no se desarrolla todavía en términos formales; más bien se presenta mediante explicaciones que se apoyan en elementos perceptivos y visuales. Este descubrimiento es especialmente importante porque posibilita entender la demostración como un proceso que comienza en formas de validación informales.

Finalmente, la resolución de problemas se identifica como un eje transversal que articula todas las categorías, actuando como mediador del aprendizaje geométrico. Las investigaciones coinciden en señalar que es a través de situaciones problemáticas donde los estudiantes movilizan la visualización, construyen significado y establecen relaciones geométricas.

La red de categorías muestra en su totalidad que el pensamiento geométrico no se desarrolla en la educación primaria de forma aislada, sino como un sistema interconectado de procesos cognitivos. Sin embargo, también muestra que no se ha hecho una transición clara hacia formas de argumentación más organizadas. Esto indica que es necesario crear propuestas didácticas que enlacen la visualización, la construcción y la demostración de manera gradual.

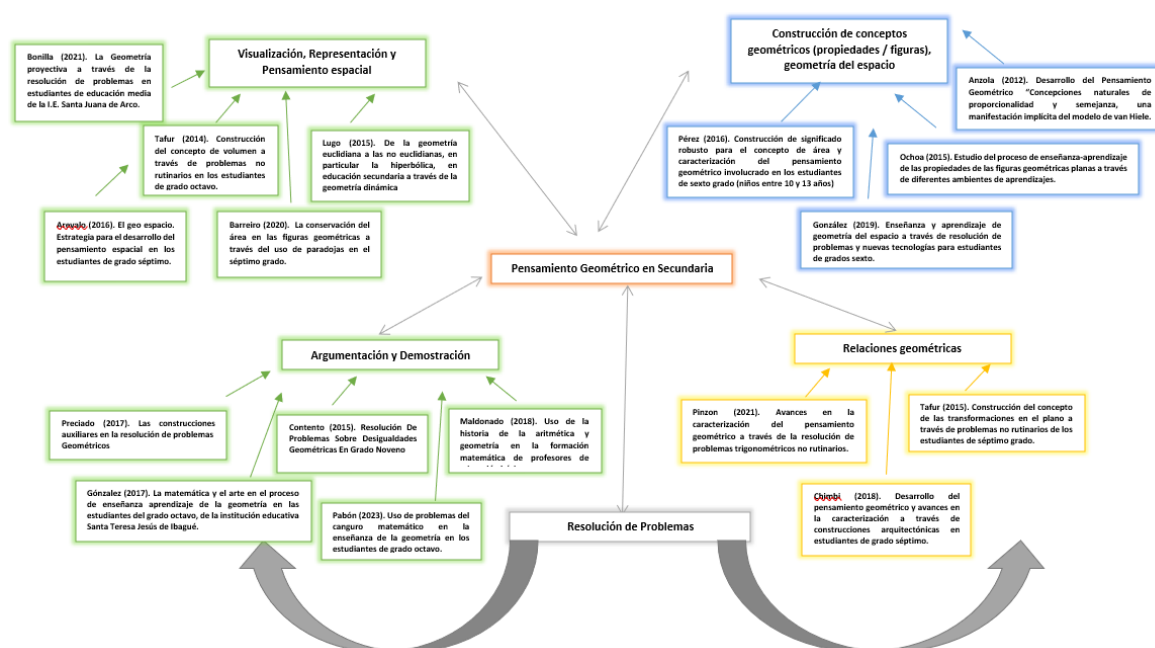
Educación Secundaria

La transición entre el pensamiento intuitivo y el formal en la educación secundaria ha sido identificada como problemática por varios estudios. Los estudiantes, en particular, consiguen llevar a cabo construcciones geométricas; sin embargo, tienen dificultades con la argumentación y la demostración (Duval, 1999).

Este descubrimiento concuerda con estudios efectuados en Colombia, que han demostrado que la enseñanza de la geometría no es capaz de afianzar los procesos de validación matemática y, por ende, perjudica la comprensión a fondo de los conceptos.

La red de categorías emergentes se muestra en la Figura 2, y fue elaborada mediante el análisis de trabajos de grado de la Maestría y Doctorado en Educación Matemática, ofrecida por la Universidad Antonio Nariño. En la educación secundaria, la organización de la red permite reconocer que la estructura del pensamiento geométrico es un sistema de procesos interconectados que resulta más complejo que en la educación primaria.

Figura 2 – Red de categorías emergentes del Pensamiento Geométrico en Educación Secundaria



Fuente: elaboración propia a partir de análisis de trabajos de grado Programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática Universidad Antonio Nariño

En primer lugar, el soporte de la actividad geométrica se mantiene a través de la visualización y las representaciones. En secundaria, a diferencia del nivel primario, estas prácticas no se restringen a la percepción; más bien funcionan como instrumentos cognitivos para examinar, prever y validar propiedades geométricas. La existencia de investigaciones enfocadas en la visualización muestra su función en la transición hacia formas más abstractas de pensamiento.

En segundo lugar, la creación de conceptos geométricos (como las propiedades de las figuras o la geometría del espacio) indica que se está avanzando hacia una formalización gradual. Los hallazgos muestran que los es-

tudiantes pueden establecer relaciones y realizar generalizaciones, pero estas construcciones dependen en gran medida del contexto de la tarea y de la mediación del docente.

Por otro lado, la solución de problemas se presenta como el eje transversal que une todas las categorías. La concentración de investigaciones en este enfoque indica que los estudiantes movilizan al mismo tiempo la visualización, la construcción y las relaciones geométricas especialmente en situaciones problemáticas—no rutinarias—, lo cual promueve aprendizajes con más sentido.

Sin embargo, la red muestra una tensión significativa en la categoría de argumentación y demostración. A pesar de que se están logrando progresos en la implementación de demostraciones (incluidas las “sin palabras”) y en los procesos de justificación, persisten obstáculos para llegar a niveles formales de validación. Esta pauta indica que la enseñanza fomenta el trabajo de resolución y construcción, aunque no siempre logra fortalecer la argumentación deductiva.

Para finalizar, las relaciones geométricas (como la semejanza, la proporcionalidad y las transformaciones) sirven como un vínculo entre la exploración y la formalización, ya que requieren que el alumnado establezca invariantes y coordine representaciones. No obstante, su entendimiento en profundidad también depende de la incorporación a procesos de argumentación.

En conjunto, la red pone de manifiesto una ruptura entre construcción y demostración: los estudiantes resuelven y construyen con relativa solvencia, pero presentan limitaciones al justificar formalmente sus procedimientos. Este hallazgo, consistente con la literatura, señala la necesidad de diseñar secuencias didácticas que articulen explícitamente visualización, construcción y demostración, favoreciendo una progresión hacia formas de argumentación cada vez más estructuradas.

La reestructuración de la red categorial posibilita una interpretación más nítida de las conexiones entre categorías, autores y palabras clave, lo que demuestra que el pensamiento geométrico en la educación secundaria se organiza alrededor de procesos distintos pero interconectados, en los cuales la solución de problemas desempeña un rol articulador.

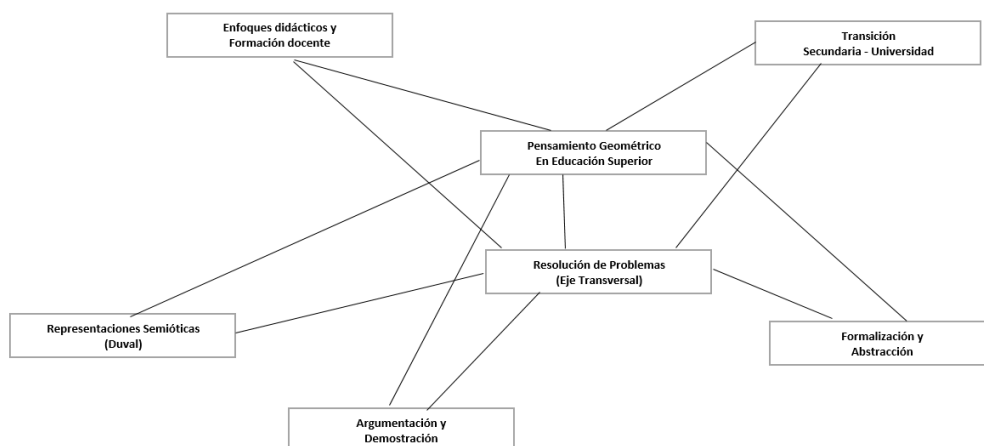
Educación Superior

La literatura ha indicado que hay fallas en la preparación de los futuros profesores en el área de geometría, sobre todo en el contexto universitario. De acuerdo con Schoenfeld (1992), la instrucción de las matemáticas debe enfocarse en el desarrollo del razonamiento matemático, lo que significa fomentar la argumentación, solucionar problemas y reflexionar.

En esta línea, los estudios en programas de capacitación docente muestran que es necesario reforzar la conexión entre el conocimiento matemático y el didáctico.

La red de categorías emergentes, que resulta del estudio de investigaciones de Maestría y Doctorado en Educación Matemática en la Universidad Antonio Nariño, se ilustra en la Figura 3. El pensamiento geométrico, a diferencia de los niveles previos, se incorpora aquí en un marco más extenso de pensamiento matemático avanzado, que se distingue por procesos de validación, formalización y abstracción.

Figura 3 – Red de categorías emergentes del Pensamiento Geométrico en Educación Superior



Fuente: elaboración propia a partir de análisis de trabajos de grado Programas de Maestría y Doctorado en Educación Matemática Universidad Antonio Nariño

La categoría de formalización y abstracción matemática muestra en primer lugar que el aprendizaje a este nivel se enfoca en construir estructuras matemáticas formales. Sin embargo, los estudios demuestran que este proceso

no siempre conlleva una comprensión profunda, y en numerosas ocasiones se restringe a la implementación de procedimientos.

En segundo lugar, la argumentación y demostración se convierten en el principal medio para validar los conocimientos matemáticos. No obstante, la investigación revisada muestra problemas continuos en la elaboración de demostraciones, lo que indica una débil conexión entre el razonamiento deductivo y la comprensión conceptual.

Por otro lado, la categoría de representaciones, que tiene su base en la teoría de Duval, enfatiza lo relevante que es armonizar diversos registros semióticos para entender las matemáticas. Este elemento es fundamental para avanzar hacia niveles de pensamiento más complejos.

Además, el paso de la educación secundaria a la universidad se presenta como un periodo decisivo, marcado por quiebres cognitivos que impactan la comprensión de los conceptos matemáticos.

Por último, los métodos pedagógicos en la educación superior, especialmente en la capacitación de maestros, demuestran que es necesario combinar la solución de problemas, la historia de las matemáticas y la reflexión pedagógica.

En conjunto, la red muestra que el pensamiento matemático en educación superior está en medio de una tensión entre la formalización y la comprensión, lo que indica que hay una crisis en cómo se enseña las matemáticas avanzadas. Este descubrimiento subraya la importancia de propuestas pedagógicas que conecten la visualización, la construcción y la demostración, asegurando así una evolución consistente del razonamiento matemático.

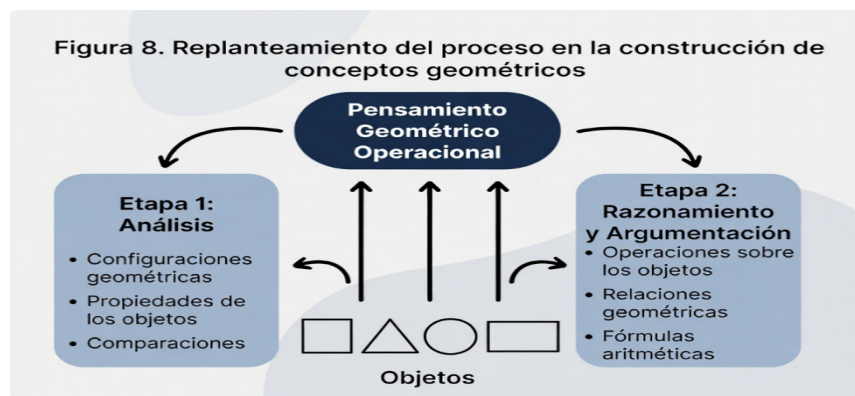
PROPUESTA DE MODELO PARA LA CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO GEOMÉTRICO

En América Latina, la enseñanza tradicional de la geometría se ha centrado en el enfoque procedimental y memorístico, restringiendo el Desarrollo del pensamiento geométrico. Si bien autores como Tall (2013) han propuesto diferenciar entre abstracción estructural y abstracción operacional, los resultados de diferentes investigaciones doctorales desarrolladas en la Universidad

Antonio Nariño evidencian que esta distinción resulta insuficiente para explicar cómo los estudiantes construyen significados robustos y transferibles de los conceptos geométricos.

El modelo que se plantea emerge de la evidencia empírica acumulada de investigaciones relacionadas en la Maestría y el Doctorado en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño, y se basa en el pensamiento geométrico operacional. Este modelo se caracteriza por dos momentos interconectados y recursivos que posibilitan la construcción genuina de conocimiento geométrico a cualquier nivel educativo (ver Figura 8):

Figura 4 – Replanteamiento del proceso en la construcción del conceptos geométricos (basado en Pérez, 2016)



Fuente: elaboración propia a partir de Pérez (2016).

Etapa 1: Análisis

Los estudiantes analizan las disposiciones geométricas, detectan propiedades que no cambian, perciben relaciones estructurales (lados, ángulos, paralelismo, semejanza, transformaciones) y determinan las condiciones que permiten mantener o cambiar magnitudes geométricas. Esta etapa pone en marcha la visualización y la percepción estructurada, constituyendo la base perceptivo-cognitiva del proceso.

Etapa 2: Razonamiento y Argumentación

A partir del análisis, los estudiantes movilizan operaciones creativas, tales como la descomposición, recomposición, comparación, subdivisión, transformación y generalización, para resolver problemas no rutinarios. En esta fase se producen argumentos geométricos que justifican las conclusiones, se dedu-

cen propiedades y se construyen significados formales. El razonamiento ya no es intuitivo sino deductivo y justificativo. Es en esta etapa donde emerge de manera natural y significativa la deducción de las fórmulas aritméticas.

Estas dos etapas no son lineales ni secuenciales estrictas, sino que se retroalimentan continuamente mediante el pensamiento geométrico operacional, favoreciendo la articulación entre visualización, construcción y demostración.

Por otro lado, estas dos etapas se articulan de forma recursiva y se potencian cuando los problemas planteados son no rutinarios (tipo olímpico), pues exigen que el estudiante genere sus propias estrategias y no aplique procedimientos memorizados.

El aporte esencial de este modelo está en la posibilidad de articular los procesos cognitivos identificados en las redes de categorías emergentes de los tres niveles de educación analizados:

- Educación Primaria

En la etapa de análisis se potencia la visualización y el razonamiento espacial (categoría central de la red de primaria), mientras que en la de razonamiento y argumentación se potencia la demostración intuitiva y la construcción de significado de los conceptos básicos (perímetro, área, relaciones geométricas). El modelo permite transitar de una geometría experiencial hacia una más estructurada, superando la fragmentación curricular típica de este nivel.

- En Educación Secundaria

La tensión que el modelo responde directamente es la que se da en la red de categorías de secundaria: la ruptura entre construcción y demostración. La combinación de análisis y razonamiento-argumentación permite pasar del pensamiento intuitivo al formal, fortaleciendo la argumentación y la justificación deductiva sin perder el soporte visual. De este modo se facilitará la resolución de problemas no rutinarios y se reducirá la brecha entre representaciones y validación formal.

- En Educación Superior

El modelo ayuda en la formación docente y en los cursos de geometría avanzada a realizar la formalización y abstracción manteniendo al mismo tiem-

po una comprensión profunda. En la etapa de razonamiento y argumentación se desarrollan competencias de demostración rigurosa y reflexión metacognitiva, fundamentales para futuros docentes. Apoya también la transición secundaria-universidad al hacer explícitos los procesos que vinculan la visualización con la argumentación formal, aspecto crítico que se detecta en la red de categorías de este nivel.

En resumen, el presente modelo provee un marco teórico-práctico coherente, que trasciende los enfoques tradicionales y responde a los desafíos identificados en la producción académica latinoamericana como la fragmentación curricular, la poca articulación entre teoría y práctica y la necesidad de desarrollar un pensamiento geométrico robusto y flexible. El uso de secuencias de actividades basadas en problemas no rutinarios es una herramienta muy potente para fortalecer la enseñanza de la geometría en los distintos niveles educativos de la región.

CONSIDERACIONES FINALES

A través del tiempo se ha demostrado que la construcción de conceptos matemáticos en el ámbito escolar colombiano se continúa enseñando bajo los mismos planteamientos de la educación tradicional, donde el estudiante se considera un individuo que capta información y memoriza fórmulas para dar respuestas a ejercicios sin saber el por qué lo está haciendo.

Con base en estos cuestionamientos los estudiantes en todos los niveles escolares no están aprendiendo a razonar ni mucho menos construyen significado apropiado para el concepto, por lo que se busca que los nuevos profesores en formación y a través de la líneas de investigación ofrecidas en diferentes instituciones educativas, propongan una transformación del enfoque que incide en el modo de pensar de los estudiantes, con respecto a la construcción de significado robusto del conceptos matemáticos, en la cual se conviertan en individuos más activos, más creativos y más analíticos.

Es de esta forma, si las escuelas llevan una práctica diferente de enseñar por medio de solución de problemas no rutinarios y teniendo en cuenta el legado histórico de las matemáticas y procesos de visualización, los estudiantes

inician sus procesos de razonamiento y construyen su conocimiento en lugar de reducirse a memorizar sin comprender. Por lo cual se recomienda, que en las instituciones educativas se plantee el trabajo escolar en términos de promover el pensamiento geométrico, por medio de actividades que reten al aprendizaje autónomo.

Por lo anterior la enseñanza de la geometría en Colombia se encuentra en un proceso de transformación que busca responder a las necesidades de una educación más pertinente y significativa. Las tendencias actuales evidencian un cambio hacia enfoques centrados en el estudiante, el uso de tecnologías y la conexión con la realidad. No obstante, es fundamental continuar fortaleciendo la formación docente y garantizar el acceso a recursos que permitan implementar estas propuestas de manera efectiva. En este sentido, la geometría se consolida como un espacio clave para el desarrollo del pensamiento crítico y la comprensión del entorno.

El modelo propuesto es este capítulo constituye un aporte relevante al ofrecer una articulación coherente entre procesos cognitivos fundamentales, permitiendo superar la fragmentación curricular y fortalecer la relación de entre teoría y práctica.

Finalmente, futuras investigaciones deberán profundizar en la validación empírica del modelo en distintos contextos educativos latinoamericanos, así como en su implementación en la formación inicial de profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

Batanero, C. (2013). Didáctica de la matemática. Síntesis.

Bishop, A. J. (1999). Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural. Paidós.

Díaz-Barriga, F. (2006). Enseñanza situada: vínculo entre la escuela y la vida. McGraw-Hill.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2013). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Universidad de Granada.

- Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic mathematics with GeoGebra. *Journal of Online Mathematics Education*, 7(3), 144-157.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas*. Bogotá: MEN.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.
- Cantoral, R. (2013). *La enseñanza de las matemáticas en el siglo XXI*. Ediciones SM.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. Routledge.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad de Granada.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança* (B. M. Albuquerque, Trad.). Artes Médicas. (Obra original publicada en 1948)
- Pérez, D. C. (2016). *Construcción de significado robusto para el concepto de área y caracterización del pensamiento geométrico involucrado en los estudiantes de sexto grado (niños entre 10 y 13 años)* [Tesis doctoral, Universidad Antonio Nariño]. Bogotá, Colombia.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). Macmillan.
- Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139565202>

CAPÍTULO 6

O ensino exploratório da homotetia: uma experiência de prática profissional de futuros professores de matemática

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas

Resumo: Este capítulo apresenta uma perspectiva sobre o ensino da Geometria na Costa Rica, a partir de uma experiência de prática profissional de futuros professores de Matemática. Analisa-se uma tarefa exploratória para introduzir a homotetia no oitavo ano, mediante o uso de um projetor caseiro. Com uma abordagem qualitativa e interpretativa, examinam-se o planejamento e o relatório reflexivo da experiência. Os resultados evidenciam o potencial de articular visualização, manipulação e discussão para construir significados geométricos, bem como o valor da prática profissional na formação inicial docente.

Palavras-chave: Homotetia. Ensino exploratório. Geometria. Formação inicial docente.

Resumen: Este capítulo presenta una mirada sobre la enseñanza de la Geometría en Costa Rica, a partir de una experiencia de práctica profesional de futuros profesores de Matemática. Se analiza una tarea exploratoria para introducir la homotecia en octavo año, mediante el uso de un proyector casero. Desde un enfoque cualitativo e interpretativo, se examinan el planeamiento y el informe reflexivo de la experiencia. Los resultados muestran el potencial de articular visualización, manipulación y discusión para construir significados geométricos, así como el valor de la práctica profesional en la formación inicial docente.

Palabras-clave: Homotecia. Enseñanza exploratoria. Geometría. Formación inicial docente.

INTRODUÇÃO

O ensino da Geometria constitui um campo relevante para a formação matemática escolar, pois favorece processos de visualização, representação, argumentação, construção e análise de relações entre objetos geométricos. No contexto costarriquenho, o *Programa de Estudo de Matemática* propõe que a Geometria seja compreendida a partir das características das figuras, das relações entre elas, da modelagem geométrica, da visualização espacial e do movimento das formas geométricas (MEP, 2012). Essa orientação curricular permite situar o ensino geométrico para além do reconhecimento estático de figuras, valorizando a exploração de relações, transformações e propriedades.

Apesar dessa orientação, a literatura em Educação Matemática tem indicado que o ensino da Geometria ainda enfrenta desafios associados a abordagens centradas em definições, desenhos, fórmulas e procedimentos mecânicos, o que pode limitar o desenvolvimento do raciocínio geométrico e a construção de significados matemáticos (Labra Peña & Vanegas Ortega, 2022; Rabanedo *et al.*, 2023). No caso da homotetia, esse desafio torna-se particularmente relevante, pois o conteúdo pode ser reduzido à ampliação ou redução de figuras, sem explorar suficientemente as relações de proporcionalidade, semelhança, correspondência entre elementos homólogos e análise de invariantes.

Na Costa Rica, a homotetia é abordada no oitavo ano, no âmbito das transformações no plano, associada ao reconhecimento de pontos, segmentos e ângulos homólogos, bem como ao traçado e à identificação de figuras homotéticas (MEP, 2012). Trata-se, portanto, de um objeto geométrico escolar que exige articular visualização, medição, representação, comparação e argumentação. Nessa direção, propostas de ensino que partem de situações visuais e manipulativas podem contribuir para que os estudantes construam significados antes da formalização conceitual.

O ensino exploratório oferece uma perspectiva pertinente para esse trabalho, ao compreender a aula de Matemática como um espaço no qual os

estudantes interpretam situações, ensaiam estratégias, formulam conjecturas, comunicam ideias e participam da sistematização do conhecimento. Como destaca Ponte (2010), considerar a Matemática como uma atividade conduz a valorizar processos de exploração e investigação. Assim, uma tarefa sobre homotetia pode favorecer o trânsito entre a observação de um fenômeno, a comparação entre figuras, a identificação de relações proporcionais e a formalização de conceitos como razão de homotetia, centro, pontos homólogos e figuras homotéticas.

Este capítulo tem como propósito analisar uma experiência de prática profissional desenvolvida por três futuros professores de Matemática, estudantes de uma carreira de Educação Matemática de uma universidade pública da Costa Rica. A experiência consistiu no planejamento e na implementação de uma tarefa exploratória para introduzir o tema da homotetia com estudantes do oitavo ano, mediante o uso de um projetor caseiro e de perguntas orientadas à análise da relação entre uma figura original e sua projeção.

O texto está organizado em torno de uma fundamentação sobre a homotetia como objeto geométrico escolar, princípios didáticos para seu ensino, o ensino exploratório como enfoque para a construção de significados em Geometria e a prática profissional na formação inicial de professores de Matemática. Em seguida, apresenta-se a metodologia, os principais resultados organizados em três categorias de análise e, por fim, uma discussão final com conclusões e questões abertas para futuras investigações.

A HOMOTETIA COMO OBJETO GEOMÉTRICO ESCOLAR

O *Programa de Estudo de Matemática* do Ministério da Educação Pública da Costa Rica (MEP) constitui uma reforma curricular orientada a fortalecer a formação matemática escolar desde o I e II Ciclos da Educação Primária até o III Ciclo da Educação Geral Básica e a Educação Diversificada. Seu enfoque principal sustenta-se na resolução de problemas, particularmente em contextos reais, físicos, sociais e culturais, ou em situações que possam ser imaginadas pelos estudantes. Nesse sentido, o currículo propõe superar uma organização do ensino centrada na exposição abstra-

ta de conteúdos, para favorecer uma mediação na qual os novos conhecimentos sejam introduzidos mediante problemas, trabalho estudantil independente, discussão interativa e fechamento ou clausura matemática. De acordo com o MEP, “a estratégia assumida se propõe fundamentar pedagogicamente a passagem do concreto ao abstrato” (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012, p. 14, tradução própria).

A partir dessa perspectiva, o currículo costarriquenho não se organiza apenas como uma lista de conteúdos, mas como uma proposta articulada por conhecimentos matemáticos, habilidades específicas, habilidades gerais e processos matemáticos. O programa estrutura-se em cinco áreas matemáticas: *Números, Geometria, Medidas, Relações e Álgebra, e Estatística e Probabilidade*. Essas áreas são desenvolvidas de maneira progressiva desde a Educação Primária até a Educação Secundária, o que fortalece a integração vertical do plano de estudos e permite que determinados objetos matemáticos sejam retomados com distintos níveis de profundidade ao longo da escolaridade.

Nesse marco, a *Geometria* ocupa um lugar particular na formação matemática escolar. O MEP a define como a área referente “ao estudo das características das figuras geométricas e das relações entre elas, à modelagem geométrica e à visualização espacial” (MEP, 2012, p. 21, tradução própria). Essa área busca potencializar processos de visualização, classificação, construção e argumentação, além de sublinhar o movimento das formas geométricas. Portanto, a Geometria não se reduz ao reconhecimento estático de figuras, propriedades ou fórmulas, mas é concebida como um espaço curricular para analisar relações, transformações, representações e movimentos de objetos geométricos.

Essa concepção é especialmente relevante para o estudo das transformações no plano, entre as quais se situa a homotetia. Na síntese temática do programa, o MEP destaca a introdução da Geometria com ênfase na visualização espacial, no movimento de objetos, nas coordenadas e em sua relação com a Álgebra, com o propósito de estimular o raciocínio, a argumentação e a compreensão dinâmica dos objetos geométricos (MEP,

2012, p. 12). A partir dessa orientação, a homotetia pode ser compreendida como um objeto geométrico escolar que articula visualização, proporcionalidade, semelhança, movimento, representação no plano cartesiano e análise de relações entre figuras.

Curricularmente, a homotetia situa-se na área de Geometria do oitavo ano, correspondente ao Terceiro Ciclo da Educação Geral Básica. Na tabela de conhecimentos do programa, para o oitavo ano, incluem-se, dentro da Geometria, os conhecimentos associados às Transformações no plano, especificamente: homotetias, pontos homólogos e segmentos homólogos. Nesse mesmo nível, articulam-se outros conhecimentos geométricos próximos, como semelhança, congruências e teorema de Tales, o que mostra que o tratamento da homotetia se vincula a relações métricas, proporcionalidade e correspondência entre figuras.

As habilidades específicas propostas pelo currículo para esse conteúdo orientam o estudo da homotetia a partir de três ações fundamentais. Em primeiro lugar, espera-se que os estudantes possam traçar em um plano cartesiano a figura obtida ao submeter um polígono dado a uma homotetia. Essa habilidade situa a homotetia como uma transformação geométrica que pode ser representada e construída em um sistema de coordenadas. Não se trata apenas de reconhecer uma figura ampliada ou reduzida, mas de produzir a imagem homotética de um polígono, considerando as relações entre o centro, a razão de homotetia e os pontos da figura original.

Em segundo lugar, o currículo propõe a habilidade de reconhecer pontos, ângulos e lados homólogos de um polígono e do polígono resultante da aplicação de uma homotetia. Essa habilidade introduz uma dimensão relacional do objeto geométrico: a homotetia não apenas transforma uma figura em outra, mas estabelece correspondências entre seus elementos. Por isso, o reconhecimento de pontos homólogos, segmentos homólogos e ângulos homólogos é central para compreender o que muda e o que permanece invariante na transformação. Em termos escolares, esse aspecto permite discutir a conservação da forma, a proporcionalidade dos comprimentos e a relação entre a figura original e sua imagem.

Em terceiro lugar, o MEP propõe que os estudantes possam reconhecer pares de figuras homotéticas no plano de coordenadas. Essa habilidade amplia o estudo desde a construção de uma imagem até a identificação e justificação de relações homotéticas entre figuras já dadas. Nesse caso, a análise requer reconhecer se duas figuras podem ser vinculadas mediante uma homotetia, identificar correspondências entre seus pontos e analisar se existe uma razão comum que explique a transformação.

As indicações pontuais do programa sugerem introduzir o tema mediante uma situação de projeção: uma fonte de luz ilumina a figura de um barco e projeta uma sombra de maior tamanho sobre uma parede. A partir dessa situação, propõem-se perguntas orientadas a identificar elementos invariantes, relações métricas entre lados e ângulos, e relações entre as distâncias da fonte de luz à figura e da figura à sombra. Essa proposta evidencia uma entrada didática coerente com o enfoque curricular, pois inicia a partir de uma situação visual e contextualizada para construir progressivamente o conceito de homotetia.

O mesmo programa propõe que, na etapa de fechamento, seja possível formalizar o conceito de homotetia utilizando uma fonte de luz para iluminar um objeto na parede da sala de aula, modificando a distância entre a fonte de luz e o objeto para observar as mudanças produzidas na sombra. Nesse contexto, o MEP assinala a importância de dialogar sobre quais elementos permanecem invariantes e quais não, bem como de medir as distâncias entre a lâmpada, o objeto e a sombra, e comparar essas distâncias com o comprimento do objeto e de sua sombra. Essa orientação permite estabelecer que a razão entre distâncias corresponde à razão entre comprimentos, favorecendo uma compreensão geométrica e métrica da homotetia.

Desse modo, a homotetia aparece no currículo costarrriquenho como um objeto geométrico escolar com dupla natureza. Por um lado, é uma transformação do plano que pode ser estudada do ponto de vista da construção geométrica e da representação cartesiana. Por outro lado, é um meio para articular relações de semelhança, proporcionalidade, correspondên-

cia entre elementos homólogos e análise de invariantes. Essa dupla natureza faz com que seu ensino requeira tarefas que mobilizem visualização, medição, argumentação e representação.

Consequentemente, o estudo escolar da homotetia no oitavo ano oferece um cenário privilegiado para trabalhar processos matemáticos transversais propostos pelo currículo: raciocinar e argumentar, formular e resolver problemas, comunicar, conectar e representar. A situação de projeção sugerida pelo MEP permite, por exemplo, conectar a Geometria com fenômenos visuais da vida cotidiana; representar relações mediante figuras, medidas e coordenadas; comunicar conjecturas sobre o que muda e o que permanece; e argumentar por que duas figuras podem ser consideradas homotéticas.

Assim, a partir do marco curricular costarricense, a homotetia não deveria ser abordada apenas como uma definição formal ou como uma técnica de traçado no plano cartesiano. Seu tratamento escolar supõe gerar condições para que os estudantes explorem relações entre figuras, observem transformações, meçam distâncias, comparem comprimentos, identifiquem correspondências e formalizem progressivamente as ideias de centro, razão, pontos homólogos, segmentos homólogos e figuras homotéticas. Essa leitura curricular justifica a pertinência de desenhar experiências de ensino exploratório, como a desenvolvida por futuros professores de Matemática durante sua prática profissional, nas quais o objeto geométrico é introduzido a partir de uma situação concreta de projeção para avançar em direção à sua institucionalização matemática.

PRINCÍPIOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO DA HOMOTETIA

O ensino da homotetia apresenta desafios importantes para a didática da Geometria, especialmente quando se pretende superar abordagens centradas em definições, traçados mecânicos e procedimentos descontextualizados. Estudos como os de Labra Peña e Vanegas Ortega (2022), Aguilera Moraga *et al.* (2025) e Rabanedo *et al.* (2023) permitem compreender a homotetia como um objeto geométrico que envolve visualização,

construção, representação, proporcionalidade, semelhança e argumentação. Assim, ensinar homotetia não consiste apenas em mostrar como uma figura aumenta ou diminui de tamanho, mas em criar condições para que os estudantes compreendam as relações geométricas que sustentam essa transformação.

Um primeiro princípio didático consiste em evitar o reducionismo procedimental. Labra Peña e Vanegas Ortega (2022) advertem que uma abordagem tradicional da Geometria tende a privilegiar “a memorização de fórmulas, definições, teoremas e propriedades apoiadas em construções mecânicas e descontextualizadas” (p. 95). De modo semelhante, Aguilera Moraga *et al.* (2025) indicam que a aprendizagem da homotetia pode ser afetada por metodologias baseadas na “memorização mecânica e repetição procedimental, em vez da compreensão conceitual” (p. 1). Esses apontamentos reforçam a necessidade de tratar a homotetia como um objeto de compreensão geométrica, e não apenas como uma técnica de construção ou cálculo.

Um segundo princípio refere-se à importância de partir de situações exploratórias, visuais e contextualizadas. Labra Peña e Vanegas Ortega (2022) mostram que o raciocínio geométrico pode ser fortalecido por meio de sequências didáticas apoiadas em recursos manipulativos, recursos virtuais e trabalho colaborativo. Em seu estudo, os avanços dos estudantes foram associados aos “recursos manipulativos e virtuais utilizados, ao trabalho colaborativo entre os estudantes e à sequenciação das atividades trabalhadas” (p. 93). Essa perspectiva é especialmente relevante para propostas que utilizam situações perceptíveis, como projeções, sombras ou ampliações, pois permitem observar relações entre uma figura original, sua imagem, as distâncias envolvidas e o fator de ampliação.

No entanto, a exploração visual não deve ser entendida como um fim em si mesma. Ela precisa ser conduzida didaticamente para que os estudantes avancem da percepção inicial para a análise de propriedades. No caso da homotetia, isso implica reconhecer o centro de homotetia, a razão, os pontos homólogos, os segmentos homólogos, os ângulos homólogos e

as relações de proporcionalidade. A tarefa exploratória, portanto, deve favorecer ações como observar, comparar, medir, conjecturar, justificar e institucionalizar.

Um terceiro princípio consiste em organizar sequências progressivas de tarefas. Aguilera Moraga *et al.* (2025), a partir da teoria dos Espaços de Trabalho Matemático, destacam que as tarefas permitem ativar o trabalho matemático por meio de representações, artefatos, visualização, construção e validação. Nessa perspectiva, uma tarefa não é apenas um exercício, mas um meio para promover raciocínio matemático. O valor didático da atividade não está somente no recurso utilizado, mas na forma como seus momentos são organizados para conduzir de uma situação contextual à formalização matemática.

Outro princípio importante é o uso intencional de artefatos manipulativos e digitais. Labra Peña e Vanegas Ortega (2022) mencionam o uso do pantógrafo, da câmara escura e do GeoGebra como recursos que favorecem a formulação de conjecturas e argumentações no estudo da homotetia. Aguilera Moraga *et al.* (2025) também ressaltam o papel do GeoGebra como ferramenta dinâmica para explorar relações entre visualização, construção e propriedades. Desse modo, os recursos não devem ser vistos apenas como elementos motivacionais, mas como mediadores do pensamento geométrico.

Também é fundamental articular a homotetia com outros saberes geométricos. Rabanedo *et al.* (2023) indicam que a homotetia costuma ser ensinada como um caso particular da semelhança ou de maneira muito limitada, o que enfraquece seu sentido na Geometria escolar. Por isso, defendem que seu estudo não ocorra “de forma isolada e desarticulada de outros conhecimentos”, mas em relação com isometrias, semelhança e teorema de Tales (p. 14). Essa articulação permite compreender a homotetia como um objeto que conecta transformações no plano, proporcionalidade, relações métricas e representação.

Um princípio adicional relaciona-se com o ensino baseado em perguntas. Rabanedo *et al.* (2023) propõem, por exemplo, a pergunta: “Por

que uma fotocopadora pode realizar a ampliação e redução de uma imagem conservando suas características?” (p. 14). Esse tipo de questionamento recupera a razão de ser da homotetia, ao situá-la como resposta matemática a um fenômeno de ampliação ou redução com conservação de relações. No contexto escolar, perguntas dessa natureza podem abrir espaço para que os estudantes interpretem fenômenos, formulem hipóteses e avancem para explicações geométricas.

Por fim, destaca-se a necessidade de institucionalizar progressivamente o conhecimento geométrico construído. As situações exploratórias requerem um fechamento matemático que permita transformar observações empíricas em definições, propriedades e relações formalizadas. Nesse ponto, a orientação curricular do MEP (2012) é pertinente ao propor, para o oitavo ano, o estudo da homotetia no marco das transformações no plano, incluindo o reconhecimento de pontos, ângulos e lados homólogos, bem como a articulação com semelhança e congruência. O próprio programa indica a importância de promover “uma atitude perseverante e ativa do estudante” e de utilizar “perguntas geradoras que encaminhem à compreensão dos conceitos” (MEP, 2012, p. 310).

Em síntese, a literatura revisada permite orientar o ensino da homotetia a partir de alguns princípios centrais: superar o tratamento procedimental; iniciar por situações visuais e exploratórias; organizar sequências progressivas; utilizar artefatos como mediadores; articular a homotetia com outros saberes geométricos; ensinar mediante perguntas; e institucionalizar as relações matemáticas construídas. Esses princípios oferecem uma base para pensar propostas de ensino da homotetia voltadas à compreensão geométrica e à construção progressiva de significados.

O ENSINO EXPLORATÓRIO COMO ENFOQUE PARA A CONSTRUÇÃO DE SIGNIFICADOS EM GEOMETRIA

O ensino exploratório constitui uma perspectiva didática que permite compreender a aula de Matemática como um espaço de produção, discussão e sistematização de significados. Nessa perspectiva, o conhecimento matemático não é apresentado apenas como um produto acabado, mas

como resultado de uma atividade na qual os estudantes interpretam situações, ensaiam procedimentos, formulam conjecturas, comunicam raciocínios e participam de processos de formalização. Ponte (2010) adverte que ensinar Matemática como um “produto acabado” tem sido problemático para diferentes gerações de professores, razão pela qual uma ideia central das abordagens alternativas consiste em “considerar a Matemática como uma atividade”, o que conduz à valorização da exploração e da investigação de situações.

Nesse enfoque, explorar e investigar não são ações acessórias, mas formas próprias da atividade matemática. Para Ponte (2010), investigar implica formular perguntas, produzir, analisar e refinar conjecturas, bem como demonstrar e comunicar resultados. Além disso, o autor assinala que, quando se busca compreender melhor uma situação, está-se explorando; e, quando a pergunta é formulada com clareza e organiza o trabalho, constitui-se um problema. Essa distinção é relevante para a aprendizagem geométrica, pois muitos objetos da Geometria escolar podem ser introduzidos a partir de situações visuais, manipulativas ou contextuais que precisam ser exploradas antes de serem formalizadas.

O ensino exploratório organiza-se em torno de tarefas matemáticas cuidadosamente selecionadas. Martins, Mata-Pereira e Ponte (2021) assinalam que essa perspectiva, próxima ao *inquiry-based approach*, deixa “uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para que os estudantes a realizem” (p. 345). Essa ideia não diminui o papel docente, mas transforma sua função: o professor propõe tarefas desafiadoras, acompanha o trabalho autônomo, identifica estratégias, seleciona produções relevantes e promove discussões coletivas orientadas para a síntese matemática.

Em termos de organização da aula, Martins *et al.* (2021) descrevem três momentos: proposta de uma tarefa, trabalho autônomo dos estudantes e discussão coletiva com síntese final. Hartwig, Pozzobon e Grützmann (2025) ampliam essa estrutura ao se referirem a quatro etapas: introdução da tarefa, resolução autônoma, discussão coletiva e sistematização das

aprendizagens. Em ambos os casos, a tarefa ocupa um lugar estruturante, pois define o tipo de atividade matemática que pode emergir, as interações possíveis e as oportunidades para construir significados.

Essa perspectiva tem particular pertinência para a Geometria, cuja aprendizagem exige articular visualização, representação, construção, linguagem e argumentação. Uma tarefa geométrica exploratória deve permitir que os estudantes transitem de uma percepção inicial das figuras para a análise de propriedades, relações e invariantes. No caso de conteúdos associados à semelhança, proporcionalidade e transformações geométricas, esse trânsito é especialmente importante, pois não basta reconhecer que uma figura muda de tamanho: é necessário identificar correspondências, relações métricas e elementos que permanecem invariantes.

O uso de tarefas exploratórias também exige planejamento rigoroso. Martins *et al.* (2021) indicam que o professor deve antecipar resoluções, prever dificuldades, estabelecer possíveis caminhos em direção ao objetivo de aprendizagem e organizar os tempos da aula. Essa preparação permite sustentar o desafio da tarefa sem substituir o trabalho intelectual dos estudantes. Nessa mesma linha, Hartwig *et al.* (2025) assinalam que o enfoque exploratório se diferencia de abordagens mais tradicionais pela condução da aula, pela seleção de tarefas e pelo envolvimento de estudantes e professor.

No campo geométrico, Sousa, Sousa e Marins (2021) mostram como uma proposta sobre semelhança de figuras pode ser organizada a partir do Ensino Exploratório de Matemática, apoiada em tecnologias digitais e na antecipação de possíveis resoluções. As autoras destacam que a elaboração do plano de aula permitiu considerar diferentes estratégias, procedimentos, representações, dificuldades e ações para a gestão da aula. Essa forma de planejamento contribui para que o objeto matemático não seja tratado apenas desde sua definição formal, mas a partir das formas pelas quais pode ser representado, discutido e reconstruído pelos estudantes.

Além disso, Sousa *et al.* (2021) sustentam que, mediante o Ensino Exploratório de Matemática, “os estudantes têm a possibilidade de ver surgir

com significado os conhecimentos e procedimentos matemáticos” (p. 472) e, ao mesmo tempo, desenvolver capacidades como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Essa ideia reforça que, em Geometria, a compreensão de um conceito é favorecida quando as relações matemáticas emergem de uma atividade organizada, discutida e posteriormente sistematizada.

Com base nisso, uma tarefa sobre homotetia pode ser entendida como uma oportunidade para construir significado geométrico quando permite observar, manipular, medir, comparar, representar e discutir. A exploração de uma projeção, por exemplo, pode conduzir à análise do que muda e do que permanece invariante; a comparação de distâncias pode abrir caminho para a noção de razão; e a discussão coletiva pode favorecer o trânsito para uma linguagem geométrica mais precisa: centro, razão de homotetia, pontos homólogos, segmentos homólogos e figuras homotéticas.

Em síntese, o ensino exploratório oferece um marco para interpretar a construção de significados geométricos a partir da atividade matemática dos estudantes e da mediação intencional do professor. Ponte (2010) contribui com a base clássica ao conceber a Matemática como atividade de exploração e investigação; Martins *et al.* (2021) caracterizam a organização e os desafios de uma aula exploratória na formação inicial; Hartwig *et al.* (2025) evidenciam o valor das tarefas exploratórias em experiências de docência; e Sousa *et al.* (2021) mostram seu potencial para o tratamento de relações geométricas. Em conjunto, esses aportes fundamentam uma abordagem da homotetia orientada a que os estudantes observem, representem, argumentem e formalizem relações geométricas com sentido.

FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E PRÁTICA PROFISSIONAL

A formação inicial de professores de Matemática constitui um espaço fundamental para articular o conhecimento matemático, o conhecimento didático e a experiência situada de ensino. Nesse processo, não basta que os futuros professores dominem conteúdos disciplinares; é necessário construir ferra-

mentas para interpretar a aprendizagem dos estudantes, selecionar e elaborar tarefas, antecipar dificuldades, gerir interações em sala de aula e refletir sobre suas decisões docentes. Desse modo, a formação inicial deve criar oportunidades para que o futuro professor aprenda a olhar a Matemática escolar como objeto de ensino, reconhecendo seus significados, representações, dificuldades e possibilidades de mediação.

Diversos autores têm indicado que aprender a ensinar Matemática implica desenvolver formas especializadas de conhecimento profissional. Llinares (1998) destaca que a formação do professor de Matemática requer atenção aos processos pelos quais os futuros docentes constroem conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. Na mesma direção, Ponte e Chapman (2008) sustentam que o conhecimento profissional docente se desenvolve em relação com a prática, as tarefas de ensino, a reflexão e os contextos nos quais a docência é exercida. Por isso, a formação inicial deve gerar experiências que permitam aos futuros professores vincular teoria e prática, não como dimensões separadas, mas como componentes de uma mesma atividade profissional.

A prática profissional ocupa um lugar central nesse processo, pois coloca o futuro professor diante da complexidade real do ensino. Nela, as decisões previstas no planejamento confrontam-se com as respostas dos estudantes, as condições institucionais, os recursos disponíveis, a gestão do tempo e os imprevistos próprios da sala de aula. Assim, a prática profissional não pode ser compreendida apenas como um espaço de aplicação de conhecimentos previamente adquiridos, mas como um cenário de aprendizagem profissional no qual saberes matemáticos, didáticos e pedagógicos são ressignificados.

Cochran-Smith (2003) argumenta que a formação docente deve superar modelos baseados na simples transmissão de técnicas, promovendo uma compreensão mais crítica e reflexiva da prática. No caso da formação de professores de Matemática, isso supõe analisar as tarefas propostas, as formas de comunicação matemática promovidas, as estratégias de mediação utilizadas e as oportunidades oferecidas aos estudantes para raciocinar, argumentar e construir significados. Dessa forma, a prática profissional converte-se em um espaço para problematizar o ensino, e não apenas para executá-lo.

Nesse sentido, o planejamento e a implementação de tarefas matemáticas em contextos reais de sala de aula constituem uma oportunidade privilegiada para o desenvolvimento profissional inicial. A tarefa selecionada pelo futuro professor expressa uma determinada compreensão do conteúdo, da aprendizagem esperada e do papel dos estudantes na aula. Quando essa tarefa é orientada por uma perspectiva exploratória, como no caso do ensino da homotetia por meio de uma situação de projeção, o futuro professor precisa antecipar estratégias possíveis, prever erros, formular perguntas, selecionar recursos, organizar a discussão coletiva e institucionalizar o conhecimento construído.

A reflexão sobre a prática é, portanto, um componente indispensável. Jaworski (2008) assinala que o desenvolvimento profissional docente se fortalece quando os professores participam de processos de investigação sobre sua própria prática. Essa ideia é especialmente importante na formação inicial, pois permite que os futuros professores aprendam a observar o que ocorre em sala de aula, interpretar as produções dos estudantes, avaliar a pertinência de suas decisões e projetar melhorias. Em vez de conceber a prática como uma experiência final da carreira, ela é assumida como uma instância formativa na qual se constroem identidade profissional e conhecimento didático-matemático.

A partir dessa perspectiva, experiências como o planejamento, a implementação e a análise de uma aula sobre homotetia permitem compreender a prática profissional como um espaço de articulação entre currículo, conteúdo geométrico, tarefas exploratórias e reflexão docente. O futuro professor não apenas ensina um tema; aprende a tomar decisões sobre como introduzi-lo, como sustentar a atividade matemática dos estudantes e como transformar uma experiência visual ou manipulativa em conhecimento geométrico institucionalizado. Consequentemente, a prática profissional configura-se como um cenário privilegiado para que futuros professores de Matemática desenvolvam uma visão profissional sobre o ensino, a aprendizagem e a construção de significados matemáticos em sala de aula.

METODOLOGIA

A formulação deste capítulo baseia-se em uma experiência pontual desenvolvida por futuros professores de Matemática durante sua prática profissional, orientada ao ensino da homotetia na educação secundária. O propósito é descrever a proposta didática, analisar aspectos de seu planejamento e implementação, e discutir as reflexões profissionais elaboradas pelos futuros professores a partir da experiência.

A proposta foi desenvolvida por três futuros professores de Matemática, estudantes de uma carreira de Educação Matemática de uma universidade pública da Costa Rica, no contexto de sua prática profissional. Essa experiência formativa vinculou-se ao planejamento e à implementação de uma aula sobre o ensino da homotetia para estudantes do oitavo ano, em duas instituições educativas públicas do país. O relatório elaborado pelos futuros professores indica que a experiência teve como objetivo documentar e refletir sobre acertos, desafios e obstáculos associados à implementação de uma tarefa exploratória para introduzir o tema da homotetia.

A análise situa-se em um paradigma interpretativo, com uma abordagem qualitativa, pois interessa compreender os significados didáticos e profissionais que emergem da experiência. Os dados analisados provêm de duas fontes documentais: *o planejamento da aula* sobre a homotetia, no qual são explicitadas tarefas, estratégias de solução, perguntas de mediação e possíveis dificuldades; e um *relatório reflexivo profissional*, no qual os futuros professores avaliam o planejamento, a implementação e os alcances da experiência.

Para organizar os resultados, a análise estrutura-se em três categorias. A primeira, *planejamento didático da tarefa exploratória*, permite examinar as decisões de planejamento que deram forma à proposta: a situação inicial, os recursos, as perguntas de mediação, os momentos de trabalho e a antecipação de dificuldades. A segunda, *construção de significados geométricos*, centra-se em como a experiência favorece o trânsito da exploração visual e manipulativa para ideias próprias da homotetia, como

razão, pontos e segmentos homólogos, semelhança, proporcionalidade e conservação de relações. A terceira, *reflexão profissional sobre a prática*, considera as avaliações dos futuros professores sobre a implementação, a participação estudantil, os ajustes realizados, as dificuldades encontradas e as aprendizagens derivadas de ensinar Geometria em um contexto real de sala de aula.

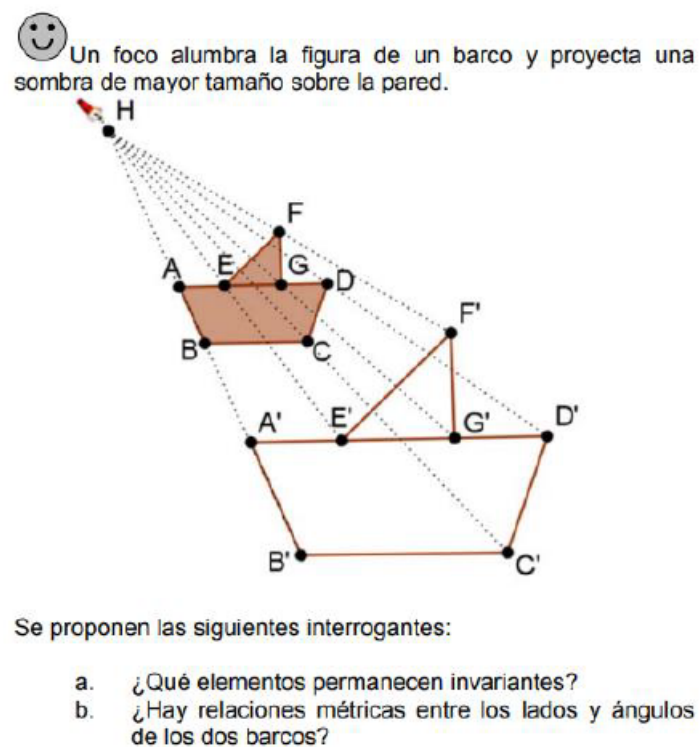
PRINCIPAIS RESULTADOS

Para apresentar os principais resultados, utilizam-se os códigos **PN** para referir-se ao *Planejamento da proposta* e **RR** para referir-se ao *Relatório reflexivo*. A análise segue a organização das três categorias definidas na metodologia.

Planejamento didático da tarefa exploratória

O planejamento da proposta mostra uma intenção clara de situar o ensino da homotetia em uma organização curricular e didática mais ampla. No **PN**, a aula é situada no oitavo ano, na área de Geometria, com ênfase nas transformações no plano, particularmente homotetias, pontos homólogos e segmentos homólogos. Além disso, articulam-se conhecimentos relacionados à semelhança de triângulos, critérios de semelhança e construção de figuras semelhantes mediante homotetias de razão maior ou menor que 1. Essa organização evidencia que a homotetia não foi pensada como um conteúdo isolado, mas vinculada a outros conhecimentos geométricos do nível. Na Figura 1, se apresenta uma indicação metodológica sugerida pelo *Programa de Estudo de Matemática* (MEP, 2012) contemplada no **PN** elaborado pelos futuros professores.

Figura 1 – Indicação Metodológica sugerida para o ensino da homotetia



Fonte: MEP (2012, pp. 308-309).

O planejamento também explicita conhecimentos prévios relevantes, tais como simetria, perímetro e área de triângulos, representação de pontos e figuras no plano, e transformações como a translação. Isso permite interpretar que os futuros professores reconheceram a necessidade de apoiar o novo conteúdo em experiências geométricas anteriores dos estudantes. Em termos didáticos, essa decisão é importante porque a homotetia requer mobilizar noções de correspondência, transformação, representação e proporcionalidade. Na Tabela 1 apresenta uma síntese dos dez aspectos contemplados no **PN** elaborado pelos futuros professores para o ensino da homotetia.

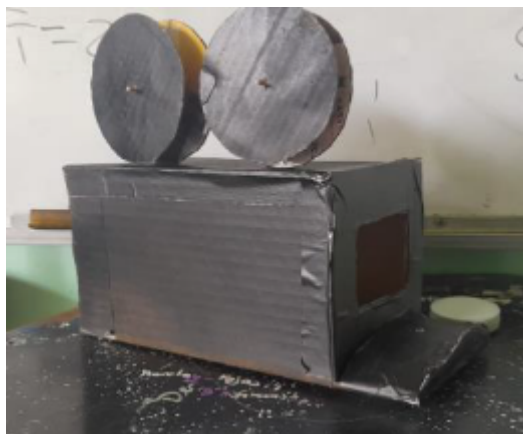
Tabela 1 – Síntese do abordamento da homotetia no planejamento da proposta

Aspecto do planejamento	Abordagem da homotetia no PN
Nível escolar e área curricular	A proposta situa-se no oitavo ano, na área de Geometria, especificamente no estudo das transformações no plano. A homotetia é abordada em articulação com pontos homólogos, segmentos homólogos e figuras homotéticas.
Conhecimentos prévios mobilizados	O planejamento considera conhecimentos anteriores como simetria, perímetro e área de triângulos, representação de pontos e figuras no plano cartesiano, e transformações geométricas como a translação.
Habilidades curriculares	São contempladas habilidades relacionadas ao traçado de figuras obtidas por homotetia, ao reconhecimento de pontos, ângulos e lados homólogos, e à identificação de pares de figuras homotéticas no plano de coordenadas.
Articulação com outros conteúdos geométricos	A homotetia é relacionada à semelhança de figuras, aos critérios de semelhança de triângulos, à proporcionalidade e à construção de figuras semelhantes mediante razões maiores ou menores que 1.
Tratamento conceitual da homotetia	O objeto matemático é apresentado como uma transformação geométrica determinada por um centro (O) e uma razão (k), que transforma uma figura plana em outra, conservando relações entre elementos correspondentes.
Transposição para a matemática escolar	O planejamento busca tornar o conceito acessível aos estudantes mediante a simplificação de termos técnicos, a identificação de conceitos-chave e o uso de expressões próximas ao repertório escolar.
Situação didática proposta	A homotetia é introduzida por meio de uma situação exploratória envolvendo projeção de imagens, com o uso de um projetor caseiro, fonte de luz, caixa e figuras de cartolina.
Perguntas de mediação	As perguntas orientam a observação do fenômeno de projeção, a comparação entre figura original e figura projetada, a análise do que muda ou permanece invariante e a identificação de relações entre medidas, lados e ângulos.
Antecipação de dificuldades	O planejamento prevê possíveis dificuldades relacionadas à compreensão do funcionamento do projetor, à identificação do centro e da razão de homotetia, ao reconhecimento de elementos homólogos e à articulação entre a situação concreta e o conceito geométrico.
Institucionalização esperada	A proposta prevê um fechamento orientado à formalização dos conceitos de homotetia, razão de homotetia, pontos homólogos, segmentos homólogos, ângulos homólogos, homotetia direta e homotetia inversa.

Fonte: elaboração própria com base no Planejamento da proposta (PN).

No **RR**, a tarefa se concretiza mediante uma situação exploratória centrada no uso de um projetor caseiro, na Figura 2 se apresenta uma fotografia do projetor caseiro elaborado e utilizado pelos futuros professores. A proposta foi organizada em três momentos: trabalho colaborativo inicial, exploração com materiais concretos e institucionalização. No primeiro momento, os estudantes respondiam a perguntas como: “Qual é a finalidade de um projetor e como ele funciona?”, “É possível construir um projetor caseiro?” e “Haverá algum conceito matemático que explique o fenômeno da projeção?”. Essas perguntas cumprem uma função didática relevante: não introduzem imediatamente a definição de homotetia, mas criam uma necessidade de explicação matemática a partir de uma situação visual e próxima.

Figura 2 – Projetor caseiro



Fonte: planejamento da proposta (PN).

O segundo momento apoiou-se em materiais concretos: uma fonte de luz, uma caixa em forma de prisma retangular e figuras de cartolina. A função desses materiais foi representar os componentes de um projetor caseiro e permitir que os estudantes observassem a relação entre a figura original e sua projeção. Nessa fase, as perguntas orientaram-se para comparar as figuras, analisar o que ocorre ao aproximar ou afastar a fonte de luz e reconhecer relações entre lados, medidas e ângulos.

Do ponto de vista do planejamento, a tarefa responde a princípios do ensino exploratório: parte de uma situação contextualizada, promove a manipulação, incorpora perguntas de mediação e prevê um fechamento de institu-

cionalização. No entanto, a análise também mostra que o planejamento apresentou uma tensão própria desse tipo de proposta: articular uma experiência física de projeção com um conceito geométrico formal. Essa tensão aparece na antecipação de dificuldades, pois os futuros professores previram que alguns estudantes poderiam não compreender o funcionamento do projetor ou não relacionar a atividade com conceitos como centro e razão de homotetia.

Nesse sentido, o planejamento não se limita a uma atividade motivadora. A tarefa procura sustentar um trânsito da experiência sensível para a formalização geométrica. O planejamento da aula e o relatório permitem observar que os futuros professores tomaram decisões sobre recursos, perguntas, organização do trabalho, antecipação de erros e fechamento matemático. Isso constitui um primeiro resultado relevante: a proposta revela um esforço para planejar um ensino da homotetia que se afasta da exposição direta e se aproxima de uma construção exploratória do conteúdo.

Construção de significados geométricos

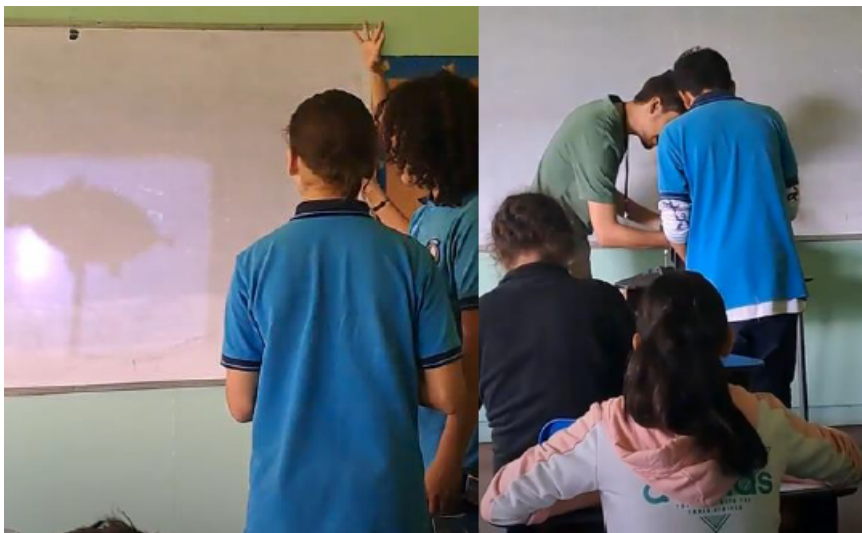
No **PN**, o objeto matemático é definido como uma transformação geométrica gerada a partir de um ponto fixo chamado centro (O), na qual uma figura plana se transforma em outra segundo uma constante (k), denominada razão de homotetia. Também se distinguem casos de homotetias diretas e inversas, e vincula-se a homotetia à semelhança, por meio da proporcionalidade dos lados e da congruência dos ângulos homólogos.

Essa transposição do conteúdo formal para uma Matemática escolar mostra uma preocupação em tornar o conceito acessível aos estudantes. No **PN**, indica-se que foram simplificados termos técnicos, identificados conceitos-chave e utilizadas expressões familiares para favorecer a compreensão do conceito de homotetia. Essa decisão é importante porque a homotetia possui vários componentes simultâneos: centro, razão, pontos homólogos, segmentos homólogos, orientação, ampliação, redução e semelhança.

No **RR**, a construção de significado desenvolve-se por meio da projeção. Primeiro, os estudantes observam o comportamento das figuras

projetadas; depois, comparam a figura original com a figura projetada; posteriormente, medem distâncias e comprimentos; e, por fim, orientam-se para a identificação de uma razão. Em particular, no momento 2.3, propõe-se um caso em que a figura geométrica é colocada exatamente na metade da distância entre a fonte de luz e a parede, trabalhando-se uma razão ($k=2$). A partir dessa configuração, solicita-se comparar lados, medidas e ângulos entre a figura original e a figura projetada. Na Figura 3, observa-se o uso do projetor pelos estudantes durante a exploração das imagens projetadas no quadro da sala de aula.

Figura 3 – Momento exploratório no uso do projetor de imagens



Fonte: relatório reflexivo dos futuros professores (RR).

Essa organização favorece que a ideia de razão não apareça apenas como um dado numérico, mas como uma relação entre distâncias e tamanhos. A medição da distância da fonte de luz à figura, da figura à projeção e dos comprimentos correspondentes permite que os estudantes associem o aumento de tamanho a uma relação proporcional. No relatório, indica-se que se pretendia concluir que, quando a figura original se encontra à mesma distância da projeção e da fonte de luz, a projeção duplica o tamanho da figura original.

Desde uma perspectiva interpretativa, esse resultado mostra que a tarefa permitiu introduzir a homotetia a partir de uma relação geométrica observável. A sombra projetada funcionou como uma representação ini-

cial da figura homotética, enquanto a medição permitiu avançar para uma compreensão métrica da razão. Diferentemente de um ensino centrado em traçar pontos no plano cartesiano a partir de uma fórmula, a proposta colocou os estudantes diante de um fenômeno que exigia comparar, conjecturar e justificar.

O **RR** indica que a abordagem pode ser classificada como descoberta indutiva, pois os estudantes trabalharam com situações específicas, valores particulares de (k) e o comportamento das sombras segundo a distância da fonte de luz, com a finalidade de chegar a uma generalização do conceito de razão de homotetia e de figuras semelhantes. Essa interpretação é coerente com a intenção exploratória da proposta: parte-se de casos particulares para construir relações mais gerais.

No entanto, a análise também evidencia que a construção de significado não foi linear. Alguns estudantes tiveram dificuldades para compreender o funcionamento do projetor ou para relacionar a atividade com os conceitos matemáticos. Além disso, surgiram intervenções espontâneas vinculadas à Física ou à Biologia, o que desviou parcialmente a atenção do tópico geométrico. Esse resultado é especialmente relevante, pois mostra que uma tarefa contextualizada abre possibilidades de conexão, mas também exige uma mediação docente capaz de reconduzir as ideias para o objeto matemático.

A institucionalização aparece como um momento-chave. No **RR**, os futuros professores indicam que o objetivo dessa fase era formalizar e consolidar os conhecimentos obtidos durante a exploração, transformando saberes pessoais em conhecimentos formais. Os conceitos a serem institucionalizados foram homotetia, pontos homólogos, segmentos homólogos, ângulos homólogos, homotetia direta e inversa. Isso permite interpretar que a tarefa não ficou reduzida a uma experiência manipulativa, mas buscou articular exploração, discussão e formalização.

Em conjunto, esta categoria mostra que a proposta favoreceu uma aproximação gradual à homotetia. Os estudantes puderam aproximar-se do conceito mediante a observação de projeções, a análise de semelhanças,

a medição de distâncias e a comparação de relações. O principal aporte didático da experiência foi permitir que a homotetia emergisse como explicação matemática de um fenômeno visual, antes de ser apresentada como definição formal.

Reflexão profissional sobre a prática

A terceira categoria permite interpretar as aprendizagens profissionais dos futuros professores. No **RR**, a implementação foi realizada em três turmas de oitavo ano: duas turmas com 27 estudantes cada uma e uma turma com 15 estudantes. Essa diversidade de contextos conferiu à experiência um caráter situado, pois a tarefa não foi pensada apenas em termos abstratos, mas implementada em salas de aula reais, com grupos, condições e dinâmicas diferentes.

Um dos resultados mais importantes refere-se à participação estudantil. O relatório indica que houve participação ativa, discussão coletiva e oportunidades para argumentar, conjecturar e discutir ideias entre pares. Também se relata que alguns estudantes assumiram protagonismo ao manipular os materiais propostos. Esse resultado permite interpretar que o planejamento exploratório favoreceu uma dinâmica de aula distinta da aula expositiva: os estudantes não apenas observaram uma explicação, mas interagiram com materiais, formularam ideias e participaram da construção do significado.

As reações dos estudantes foram avaliadas como majoritariamente positivas. Segundo o **RR**, os estudantes destacaram a utilidade das atividades práticas para compreender melhor o conceito de homotetia, e os futuros professores perceberam um interesse inicial significativo, especialmente ao aplicar conceitos teóricos a exemplos práticos e manipuláveis. Essa avaliação sugere que a tarefa conseguiu gerar envolvimento estudantil e permitiu relacionar o conteúdo geométrico com uma experiência concreta.

Entretanto, a reflexão profissional também evidencia desafios. O relatório indica que algumas dificuldades levaram à realização de ajustes

em tempo real, como ampliar o tempo dedicado às explicações e às atividades. Também se identificou a necessidade de dar um tratamento epistemológico prévio ao conceito de homotetia e de considerar sua abordagem interdisciplinar, especialmente porque a projeção de sombras pode ativar conexões com outras áreas das ciências naturais. Esse aspecto é relevante porque mostra que os futuros professores não apenas descreveram o ocorrido, mas reconheceram condições para melhorar o planejamento e a gestão da tarefa.

Do ponto de vista da formação inicial, a experiência permitiu que os futuros professores tomassem consciência da complexidade de ensinar Geometria em uma sala de aula real. Nas conclusões do **RR**, eles assinalam que a prática foi uma aproximação importante à realidade educativa, permitiu desenvolver autonomia na tomada de decisões, estabelecer autoridade e respeito, e fortalecer habilidades pedagógicas como o planejamento, a adaptação de conteúdos e a avaliação formativa e somativa.

Além disso, os futuros professores reconheceram que a prática lhes permitiu enfrentar situações próprias da sala de aula: diferenças individuais, problemas de disciplina, inclusão educativa, adaptação curricular, condições de infraestrutura, disponibilidade de recursos, acesso à tecnologia e dinâmica particular do grupo estudantil. Isso amplia o alcance do resultado: a experiência não contribuiu apenas para o planejamento de uma tarefa sobre homotetia, mas também para a construção de uma visão profissional sobre o contexto escolar.

A reflexão dos futuros professores permite observar um deslocamento do planejamento ideal para a prática situada. No **PN**, antecipam-se papéis, perguntas, habilidades e recursos; no **RR**, aparecem as respostas reais dos estudantes, os ajustes, as dificuldades, os desvios temáticos e as avaliações posteriores. Essa relação entre planejamento e implementação constitui um aspecto central da prática profissional: permite confrontar as decisões didáticas com a complexidade da sala de aula e produzir conhecimento profissional a partir dessa confrontação.

Em síntese, os resultados mostram que a experiência de ensino exploratório da homotetia teve três aportes principais. Primeiro, permitiu

planejar uma tarefa contextualizada e manipulativa, articulada com habilidades curriculares e perguntas de mediação. Segundo, favoreceu a construção inicial de significados geométricos associados à razão, semelhança, pontos homólogos, segmentos homólogos e relações entre figura original e figura projetada. Terceiro, gerou oportunidades de reflexão profissional sobre o ensino da Geometria, a gestão da aula e os desafios de implementar tarefas exploratórias em contextos reais.

DISCUSSÃO FINAL

A experiência analisada permite sustentar que o ensino da homotetia adquire maior sentido quando é organizado como uma atividade de exploração, discussão e formalização progressiva. No currículo costarricense, esse conteúdo integra o estudo das transformações no plano e se articula com a visualização, o movimento de figuras, o reconhecimento de elementos homólogos, a proporcionalidade e a semelhança. Nesse marco, a tarefa do projetor caseiro constituiu uma entrada coerente com essa orientação curricular, pois partiu de um fenômeno visual e manipulativo que exigia observar, comparar, medir e explicar relações geométricas.

Essa forma de abordar a homotetia dialoga diretamente com uma concepção curricular da Geometria que valoriza a modelagem geométrica, a visualização espacial, a construção e a argumentação (MEP, 2012). A proposta analisada mostra que essas orientações podem ser concretizadas quando o conteúdo geométrico é mobilizado para interpretar um fenômeno próximo aos estudantes. Assim, a homotetia deixa de ser apenas uma técnica de ampliação ou redução de figuras e passa a ser compreendida como uma transformação que envolve centro, razão, correspondência entre elementos, conservação de relações e proporcionalidade.

Do ponto de vista didático, os resultados reforçam a necessidade de superar um tratamento procedimental da homotetia. A experiência mostra que as ideias de razão, semelhança, elementos homólogos e conservação da forma podem emergir de uma situação concreta antes de serem formalizadas. Esse aspecto se aproxima dos estudos de Labra Peña e Vanegas Ortega (2022), ao evidenciar o papel de recursos manipulativos e de sequ-

ências progressivas na promoção do raciocínio geométrico. Também se articula com Rabanedo *et al.* (2023), na medida em que a homotetia aparece vinculada a outros saberes geométricos, e não como um conteúdo isolado ou reduzido a uma aplicação particular da semelhança.

Ao mesmo tempo, a experiência permite destacar que o uso de materiais, por si só, não garante uma abordagem exploratória. Como indica Ponte (2010), explorar envolve formular perguntas, produzir conjecturas e avançar para uma compreensão mais organizada da situação. Na proposta analisada, as perguntas sobre o funcionamento do projetor criaram condições para que os estudantes atribuíssem sentido ao fenômeno observado. Contudo, o valor matemático da tarefa dependeu da mediação docente: orientar a observação, promover comparações, solicitar medições, retomar produções dos estudantes e conduzir a institucionalização dos conceitos. Esse movimento se aproxima do que Martins *et al.* (2021) caracterizam como aspectos centrais da aula exploratória: seleção cuidadosa da tarefa, antecipação de dificuldades, gestão do trabalho autônomo, discussão coletiva e síntese final.

Nesse sentido, a experiência também permite refletir sobre o currículo costarrriquenho e sua implementação em sala de aula. O *Programa de Estudo de Matemática* valoriza a resolução de problemas, a contextualização ativa, a conexão entre conhecimentos, a visualização e a argumentação (MEP, 2012). A tarefa do projetor caseiro mostra uma possibilidade concreta de materializar esses princípios no ensino da Geometria, especialmente quando o planejamento articula uma situação contextualizada com habilidades curriculares específicas. Entretanto, a experiência também evidencia que a implementação desse currículo exige professores capazes de transformar orientações gerais em tarefas matemáticas potentes, gerir discussões e institucionalizar relações geométricas.

Desde a formação inicial, a prática profissional analisada revela-se como um espaço de construção de conhecimento didático-matemático. Os futuros professores precisarão interpretar a homotetia como objeto matemático escolar, selecionar recursos, antecipar dificuldades, organizar perguntas, conduzir a atividade dos estudantes e refletir sobre os

alcances da implementação. Essa dinâmica dialoga com a ideia de que aprender a ensinar Matemática implica articular teoria, prática, reflexão e contexto. A experiência não se limita, portanto, à aplicação de um planejamento, mas constitui uma oportunidade para compreender a complexidade de ensinar Geometria em condições reais de aula.

Em termos gerais, a experiência evidencia o potencial das tarefas exploratórias para introduzir conteúdos geométricos quando estas conectam visualização, manipulação, medição, argumentação e institucionalização. A homotetia, nesse caso, funcionou como um objeto articulador entre currículo, conteúdo matemático, recursos didáticos e reflexão profissional. Ao mesmo tempo, permanecem questões em aberto: como fortalecer o trânsito da exploração para a formalização matemática; que perguntas docentes favorecem melhor a compreensão da razão de homotetia; como evitar que conexões com outros fenômenos dispersem o foco geométrico; e de que modo integrar recursos manipulativos e digitais em sequências mais amplas sobre transformações no plano.

Assim, a experiência analisada permite compreender que o ensino exploratório da homotetia pode contribuir tanto para a aprendizagem geométrica dos estudantes quanto para a formação inicial de professores de Matemática. No contexto costarricense, esse tipo de proposta oferece uma via para concretizar orientações curriculares que defendem uma Geometria mais dinâmica, relacional e argumentativa, ao mesmo tempo em que fortalece a prática profissional como espaço de reflexão, tomada de decisões e construção de conhecimento docente.

REFERÊNCIAS

- Aguilera Moraga, Y., Verdugo-Hernández, P., & Gatica, J. (2025). Design and implementation of a task sequence for teaching homothety. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(6), em2656. <https://doi.org/10.29333/ejmste/16540>
- Cochran-Smith, M. (2003). Learning and unlearning: The education of teacher educators. *Teaching and Teacher Education*, 19(1), 5–28. [https://doi.org/10.1016/S0742-051X\(02\)00091-4](https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00091-4)

Hartwig, G. R., Pozzobon, M. C. C., & Grützmann, T. P. (2025). Tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório em uma vivência de estágio de docência. *Ensino da Matemática em Debate*, 12(1), 55–75. <https://doi.org/10.23925/2358-4122.66729>

Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development. *ZDM Mathematics Education*, 40, 507–519. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0132-6>

Labra Peña, J. A., & Vanegas Ortega, C. M. (2022). Desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de Enseñanza Media cuando abordan el concepto de homotecia. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 25(1), 93–120. <https://doi.org/10.12802/reli-me.22.2514>

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17, 51–63.

Martins, M., Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2021). Os desafios da abordagem exploratória no ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35(69), 343–364. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a16>

MEP. Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas: I y II ciclo de la Educación Primaria, III ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. Ministerio de Educación Pública.

Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Unión*, 21, 13–30.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 225–263). Routledge.

Rabanedo, P., Llanos, V. C., Otero, M. R., & Gazzola, M. P. (2023). Un REI para la enseñanza de la geometría en la formación de profesores de matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 18(2), 12–21.

Sousa, M. S., Sousa, M. T. A., & Marins, A. S. (2021). Uma proposta de aula remota utilizando o ensino exploratório de matemática: desenvolvendo o conceito de semelhança de figuras geométricas no contexto da residência pedagógica. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, 8(23), 470–484. <https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i23.4969>

CAPÍTULO 7

O ensino da Geometria no Peru: tendências, desafios e perspectivas

Daysi García-Cuellar
Mihály Martínez-Miraval

Resumo: O presente capítulo analisa as pesquisas sobre o ensino da Geometria no Peru, desenvolvidas principalmente no âmbito do Mestrado em Ensino da Matemática e do IREM-PUCP, no período de 2019 a 2026. A partir da revisão de dissertações, artigos científicos e capítulos de livros, identificam-se cinco eixos de análise: representações semióticas, Espaço de Trabalho Matemático, conhecimento profissional do professor, tecnologias digitais e perspectivas emergentes. Os resultados evidenciam a consolidação de diversos eixos temáticos de pesquisa e apontam desafios relacionados à formação de professores, ao currículo e à incorporação de tecnologias emergentes no ensino da Geometria.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Geometria. Educação Matemática.

Resumen: El presente capítulo analiza las investigaciones sobre la enseñanza de la geometría en el Perú desarrolladas principalmente en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y el IREM-PUCP durante el período 2019–2026. A partir de la revisión de tesis, artículos y capítulos de libro, se identifican cinco ejes de análisis: representaciones semióticas, Espacio de Trabajo Matemático, conocimiento profesional del profesor, tecnologías digitales y perspectivas emergentes. Los resultados evidencian la consolidación de diversos ejes temáticos de investigación y plantean desafíos relacionados con la formación docente, el currículo y la incorporación de tecnologías emergentes en la enseñanza de la Geometría.

Palabras-clave: Enseñanza de la Geometría. Geometría. Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN

La Geometría constituye uno de los dominios fundamentales de la Matemática y de la Educación Matemática, debido a su contribución al desarrollo del razonamiento espacial, la visualización, la argumentación y la comprensión de las relaciones entre los objetos y el espacio. Su enseñanza trasciende el aprendizaje de conceptos y procedimientos geométricos, pues favorece la construcción de formas particulares de pensar y de resolver problemas que resultan esenciales para la formación científica y ciudadana. En las últimas décadas, las investigaciones en Educación Matemática han mostrado que la enseñanza de la geometría implica desafíos específicos relacionados con la naturaleza de los objetos geométricos, los procesos de visualización, la utilización de diferentes registros de representación, la argumentación y demostración, así como la incorporación de tecnologías digitales y otros recursos que amplían las posibilidades para la construcción del conocimiento geométrico (Duval, 1995, 2011; Gutiérrez & Jaime, 2012; Ortega & Pecharromán, 2015).

En Latinoamérica, el desarrollo de la investigación en Educación Matemática ha permitido consolidar comunidades académicas, programas de formación de posgrado y grupos de investigación que han contribuido significativamente al estudio de diversos fenómenos didácticos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este contexto, la geometría ha adquirido una creciente relevancia debido al interés por comprender los procesos cognitivos involucrados en la visualización, el razonamiento espacial, la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales para favorecer el aprendizaje de conceptos geométricos. Asimismo, diferentes marcos teóricos, tales como la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, la Aproximación Instrumental, el Espacio de Trabajo Matemático, Teoría Antropológica de lo didáctico y otras perspectivas propias de la Didáctica de la Matemática, han orientado numerosas investigaciones desarrolladas en la región (Sánchez *et al.*, 2025).

En el caso peruano, el desarrollo de la investigación en Educación Matemática se encuentra estrechamente vinculado con la creación de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad

Católica del Perú (PUCP), programa que ha desempeñado un papel fundamental en la formación de investigadores y en la consolidación de líneas de investigación especializadas (Salazar & Gaita, 2015; Salazar & Neira, 2019). A ello se suma la labor desarrollada por el Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP), la Sociedad Peruana de Educación Matemática (SOPEMAT) y la Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática (APINEMA), instituciones que han contribuido a fortalecer la producción científica, la formación docente y el intercambio académico tanto a nivel nacional como internacional (Salazar & Neira, 2019). Como consecuencia de este proceso de consolidación, la geometría ha constituido una de las áreas de desarrollo de investigaciones que abarcan diversos niveles educativos, múltiples marcos teóricos y una creciente diversidad de recursos didácticos y tecnológicos.

Si bien existen trabajos que describen el desarrollo general de la Educación Matemática en el Perú (Salazar & Neira, 2019; Salazar & Gaita, 2015), hasta donde alcanza nuestro conocimiento no se dispone de una sistematización centrada específicamente en la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Esta ausencia dificulta reconocer las principales líneas de desarrollo, los aportes alcanzados y los desafíos que enfrenta esta área de investigación dentro del contexto peruano.

En ese sentido, el presente capítulo tiene como propósito presentar un panorama del desarrollo de la investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el Perú, tomando como referencia las investigaciones desarrolladas principalmente en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la PUCP y otros aportes realizados por investigadores del IREM-PUCP. A partir de ello, se identifican los principales ejes de análisis que han orientado el estudio de la geometría, se analizan sus contribuciones al campo de la Educación Matemática y se discuten algunos desafíos y perspectivas que pueden orientar el desarrollo futuro de la investigación en esta área.

GEOMETRÍA EN EL CURRÍCULO PERUANO

La Geometría ocupa un lugar fundamental en el currículo peruano al constituirse como uno de los ejes mediante los cuales los estudiantes

desarrollan la comprensión del espacio, la visualización, el razonamiento y la argumentación matemática. En el Currículo Nacional de la Educación Básica (CNEB), estos aprendizajes se integran en la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización”, la cual promueve que los estudiantes modelen objetos mediante formas geométricas, interpreten relaciones espaciales, utilicen procedimientos de construcción y medición, y argumenten sobre las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos. Desde esta perspectiva, la geometría trasciende el aprendizaje de definiciones y fórmulas para convertirse en un medio que permite comprender, representar e interpretar el espacio físico y resolver problemas presentes en diversos contextos (Ministerio de Educación del Perú [MINEDU], 2016).

El desarrollo de esta competencia se articula en torno a cuatro capacidades: modela objetos con formas geométricas y sus transformaciones; comunica su comprensión sobre las formas y relaciones geométricas; usa estrategias y procedimientos para orientarse en el espacio; y argumenta afirmaciones sobre las relaciones geométricas, tal como se presenta en la Figura 1.

Figura 1 – Capacidades de la competencia resuelve problemas de forma, movimiento y localización



Fuente: elaboración propia a partir del Currículo Nacional de la Educación Básica (MINEDU, 2016), con apoyo de IA generativa (Gemini).

Estas capacidades se desarrollan bajo el enfoque centrado en la resolución de problemas, que orienta el área de Matemática en el CNEB. Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático se concibe como un proceso de construcción de conocimientos a partir de situaciones problemáticas significativas, en las que los estudiantes movilizan conceptos, procedimientos, estrategias y formas de razonamiento para comprender, representar y resolver problemas en diversos contextos. En particular, en el ámbito de la geometría, este enfoque promueve que el estudio de las formas, las relaciones espaciales y las propiedades geométricas trascienda el aprendizaje de definiciones y procedimientos, constituyéndose en un medio para modelar situaciones, formular y validar conjeturas, argumentar matemáticamente y comunicar resultados, favoreciendo así el desarrollo progresivo del pensamiento geométrico (MINEDU, 2016).

Coherentemente con el enfoque centrado en la resolución de problemas, el CNEB organiza los aprendizajes geométricos mediante una progresión que se desarrolla desde la educación inicial hasta el término de la educación secundaria. Esta progresión favorece el tránsito desde la exploración intuitiva de las formas y relaciones espaciales hacia la comprensión de propiedades, la argumentación y la resolución de problemas geométricos cada vez más complejos (MINEDU, 2016).

Durante los primeros años, el énfasis recae en la construcción de nociones espaciales mediante la exploración del entorno, el reconocimiento de formas, la ubicación y los desplazamientos, favoreciendo el desarrollo de la percepción espacial y la comunicación de relaciones de posición (MINEDU, 2016).

En la educación primaria, dicha progresión incorpora gradualmente el estudio de figuras bidimensionales y tridimensionales, sus propiedades, la composición y descomposición de figuras, la simetría, las transformaciones geométricas, la ubicación en el plano cartesiano y la estimación y medición de longitudes, superficies y capacidades. Asimismo, el currículo enfatiza la construcción de argumentos basados en propiedades geométricas, promoviendo que los estudiantes expliquen sus procedimientos y establezcan relaciones entre distintas representaciones de un mismo objeto geométrico.

En la educación secundaria, la geometría adquiere un mayor nivel de formalización al incorporar contenidos como congruencia y semejanza, relaciones métricas en triángulos, transformaciones geométricas, homotecias, isometrías, geometría analítica, cuerpos de revolución y cónicas. Paralelamente, se espera que los estudiantes desarrollen procesos de modelación, visualización, demostración y argumentación mediante el uso de diferentes representaciones, instrumentos y recursos tecnológicos. En este nivel, la competencia deja de centrarse únicamente en el reconocimiento de propiedades para orientarse hacia la resolución de problemas que requieren establecer relaciones entre diferentes objetos geométricos, justificar conjeturas y validar resultados mediante argumentos matemáticos.

El currículo peruano también reconoce el papel de los recursos tecnológicos como mediadores del aprendizaje geométrico. En los estándares de aprendizaje y orientaciones pedagógicas se promueve el uso de instrumentos de construcción, representaciones dinámicas y recursos digitales que favorezcan la exploración, la visualización y la validación de propiedades geométricas. Esta orientación ha sido reforzada recientemente mediante materiales curriculares elaborados por el Ministerio de Educación, los cuales destacan que el desarrollo de la competencia “Resuelve problemas de forma, movimiento y localización” implica la articulación entre modelación, representación, argumentación y resolución de problemas en escenarios apoyados por recursos tecnológicos (MINEDU, 2024).

No obstante, diversos estudios han señalado que la implementación curricular enfrenta importantes desafíos. Entre ellos destacan la fragmentación de algunos contenidos geométricos, la enseñanza centrada en procedimientos algorítmicos, la limitada articulación entre los diferentes objetos matemáticos y la escasa presencia de actividades orientadas al razonamiento, la demostración y la exploración de propiedades. Estas limitaciones evidencian la necesidad de fortalecer la formación docente y promover enfoques didácticos que favorezcan una comprensión más integrada de la geometría y su enseñanza (García-Cuéllar *et al.*, 2019).

GEOMETRÍA EN LA FORMACIÓN DOCENTE EN PERÚ

La formación inicial de profesores de Matemática en el Perú se desarrolla en universidades e Institutos y Escuelas de Educación Superior Pedagógica (IESP/EESP), instituciones que diseñan e implementan sus propuestas formativas en el marco de la normativa vigente y de las demandas de la Educación Básica. En el caso de los IESP/EESP, el Diseño Curricular Básico Nacional (DCBN) constituye el principal referente para la organización de los programas de estudios de Formación docente de Educación Secundaria en la especialidad de Matemática, estableciendo un perfil de egreso basado en competencias profesionales docentes y articulado con el Marco de Buen Desempeño Docente y el Currículo Nacional de la Educación Básica (Ministerio de Educación [MINEDU], 2019).

Independientemente del modelo curricular adoptado por cada institución formadora, existe consenso en que la preparación de un profesor de Matemática requiere integrar conocimientos disciplinares, pedagógicos e investigativos que le permitan comprender cómo aprenden los estudiantes, diseñar situaciones de enseñanza pertinentes y reflexionar críticamente sobre su práctica profesional (Shulman, 1987). En esta línea, el DCBN propone una formación orientada al desarrollo de competencias que articulan el dominio del conocimiento matemático, la práctica pedagógica, la investigación y el compromiso ético, promoviendo que el futuro docente construya conocimientos profesionales mediante la interacción permanente entre teoría y práctica (MINEDU, 2019).

En la especialidad de Matemática, el currículo reconoce que uno de los principales desafíos consiste en formar docentes con un sólido dominio del conocimiento matemático para la enseñanza. En este sentido, señala que dicho dominio trasciende el conocimiento de conceptos, definiciones y procedimientos, e incorpora capacidades para comprender el progreso de los aprendizajes, diseñar tareas matemáticas, seleccionar recursos didácticos, interpretar las estrategias de los estudiantes y promover procesos de razonamiento, argumentación y resolución de problemas (MINE-

DU, 2019). Esta perspectiva coincide con los planteamientos de Shulman (1987), quien sostiene que la enseñanza requiere la articulación entre el conocimiento disciplinar y el conocimiento pedagógico del contenido, así como con los desarrollos posteriores sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball *et al.*, 2008) y el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo *et al.*, 2018).

En este contexto, la geometría ocupa un lugar relevante en la formación inicial del profesorado debido a las particularidades que caracterizan su enseñanza y aprendizaje. A diferencia de otros dominios de la matemática, la actividad geométrica exige coordinar procesos de visualización, construcción, representación, argumentación y demostración, además de establecer relaciones entre distintos registros de representación y diferentes niveles de formalización (Duval, 2011). Por ello, la formación del futuro profesor no puede limitarse al dominio de contenidos geométricos, sino que requiere comprender las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, anticipar posibles estrategias de resolución, diseñar tareas que favorezcan el razonamiento espacial y seleccionar recursos que contribuyan a la construcción de significados matemáticos (Gutiérrez, 1996; NCTM, 2014).

Asimismo, el DCBN enfatiza la necesidad de incorporar las tecnologías digitales como herramientas que potencien el aprendizaje matemático y favorezcan el desarrollo del pensamiento crítico, la creatividad y la investigación. Desde esta perspectiva, los recursos tecnológicos no constituyen un fin en sí mismos, sino medios para promover procesos de exploración, modelación, visualización y resolución de problemas, en concordancia con las demandas de la sociedad del conocimiento y de la competencia digital docente (MINEDU, 2019). Esta orientación resulta especialmente pertinente para la enseñanza de la geometría, disciplina en la que los entornos de geometría dinámica, la realidad aumentada, la impresión 3D y, más recientemente, la inteligencia artificial generativa que han ampliado las posibilidades para representar, explorar y validar propiedades geométricas.

Por ello, la formación inicial del profesorado de Matemática demanda el desarrollo de un conocimiento profesional que articule el dominio de la geometría, la comprensión de los procesos de aprendizaje, el diseño de situaciones didácticas y el uso fundamentado de tecnologías. Este escenario explica que una parte importante de la investigación peruana reciente se haya orientado hacia el estudio del conocimiento profesional docente, el trabajo matemático del profesor, la planificación de tareas y la integración de tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría. Así, la investigación en didáctica de la geometría no solo aporta evidencias sobre cómo aprenden los estudiantes, sino que también contribuye a fortalecer los procesos de formación inicial y continua del profesorado, aspecto que constituye una de las principales tendencias de la producción científica nacional (Salazar & García-Cuéllar, 2020; Toledo, 2024; Masgo, 2021).

INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN PERÚ

En concordancia con el propósito del presente capítulo, se analizaron las investigaciones sobre la enseñanza de la geometría desarrolladas principalmente en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) del periodo 2019 al 2026. Para facilitar su análisis e identificar las principales tendencias de esta producción científica, los estudios se organizaron en cinco ejes de análisis: las representaciones semióticas en geometría, el Espacio de Trabajo Matemático en el dominio de la geometría, el conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la geometría, las tecnologías digitales y las perspectivas emergentes. Estos ejes no constituyen categorías excluyentes, ya que una misma investigación puede aportar simultáneamente a más de uno de ellos. No obstante, cada estudio se analizó en el eje que representa su principal contribución teórica o temática.

Investigaciones sobre las representaciones semióticas en geometría

La Teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS), propuesta por Duval (1995, 2006), constituye uno de los principales referentes teóricos utilizados en las investigaciones desarrolladas sobre la enseñanza de la geometría en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP). Desde esta perspectiva, la comprensión de los objetos matemáticos depende de la coordinación de diferentes registros de representación y de la capacidad de los estudiantes para realizar tratamientos y conversiones entre ellos. En el dominio de la geometría, esta teoría adquiere especial relevancia debido a que la construcción del conocimiento geométrico requiere articular representaciones figurales, discursivas, simbólicas y dinámicas para favorecer procesos de visualización, argumentación y demostración.

Las investigaciones desarrolladas bajo esta mirada teórica evidencian un interés común por comprender cómo los estudiantes construyen significados geométricos a partir de la interacción entre diferentes registros de representación. No obstante, los estudios difieren en los contenidos abordados y en los recursos utilizados para promover dichas coordinaciones.

En Masgo (2021) se analizó el aprendizaje de la semejanza de triángulos mediante el uso de GeoGebra, mostrando que el entorno dinámico favorece la coordinación entre registros figural, algebraico y verbal, permitiendo a los estudiantes establecer relaciones entre propiedades geométricas y justificar sus procedimientos. En una línea similar, Bardales (2021) analizó la construcción de la noción de homotecia como transformación geométrica mediante una propuesta didáctica fundamentada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica y apoyada en GeoGebra. Sus resultados muestran que la coordinación entre diferentes registros de representación, particularmente el registro figural y el discursivo, favorece la comprensión de las propiedades geométricas involucradas en la homotecia y el establecimiento de relaciones entre figuras semejantes.

Posteriormente, Álvarez (2021) amplió esta perspectiva al estudiar los procesos de visualización involucrados en la resolución de problemas geo-

métricos, identificando que las dificultades de los estudiantes no se originan únicamente en el reconocimiento de las figuras, sino también en la limitada coordinación entre diferentes registros de representación. De manera complementaria, Cribillero (2022) mostró que el uso de recursos tecnológicos favorece la conversión entre registros semióticos y fortalece la argumentación matemática durante la resolución de tareas geométricas. Estos resultados coinciden con los planteamientos de Duval (2006), quien sostiene que la comprensión matemática no depende de una representación aislada, sino de la coordinación entre múltiples sistemas de representación.

Las investigaciones más recientes evidencian una evolución hacia el análisis de nuevos recursos y contextos de enseñanza. García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2023) exploraron el potencial de herramientas digitales para promover la articulación entre diferentes registros de representación en la enseñanza de la geometría, destacando que la interacción entre representaciones dinámicas y discursivas favorece procesos de exploración, validación y comunicación de ideas matemáticas. Por su parte, Toledo (2024), en un estudio desarrollado con estudiantes de cuarto grado de educación primaria, analizó cómo los estudiantes reconocen cuadriláteros al reconfigurar figuras geométricas desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica. Los resultados evidenciaron que la coordinación entre registros figurales, verbales y simbólicos, junto con los procesos de reconfiguración, favorece el reconocimiento de las propiedades de los cuadriláteros y el desarrollo del razonamiento geométrico.

La Tabla 1 sintetiza las principales investigaciones desarrolladas en este eje, indicando los contenidos geométricos abordados, y sus principales contribuciones al campo de la enseñanza de la geometría.

Tabla 1 – Investigaciones sobre las representaciones semióticas en Geometría

Autor	Tema geométrico	Contribución principal
Bardales (2021)	Homotecia	Evidencia que la coordinación entre los registros de representación semiótica, especialmente el registro figural y el discursivo, favorece la construcción de la noción de homotecia como transformación geométrica y la comprensión de las relaciones entre figuras semejantes.
Masgo (2021)	Semejanza de triángulos	Destaca el papel del registro figural dinámico en la comprensión de la semejanza de triángulos, favoreciendo la coordinación entre registros mediante GeoGebra.
Álvarez (2021)	Rotación y traslación en el plano	Analiza la función de las aprehensiones figurales en la comprensión de las transformaciones geométricas y en la resolución de problemas.
Cribillero (2022)	Semejanza de triángulos	Evidencia las transformaciones semióticas realizadas por los estudiantes y propone tareas con GeoGebra que favorecen la conversión entre registros de representación.
García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2023)	Áreas de figuras planas	Muestra el potencial de la herramienta polígono rígido de GeoGebra para promover la reconfiguración de figuras y fortalecer la aprehensión operativa durante el cálculo de áreas.
Toledo (2024)	Cuadriláteros	Evidencia que la coordinación entre registros figurales, verbales y simbólicos contribuye al desarrollo de la comprensión geométrica en estudiantes de educación primaria.

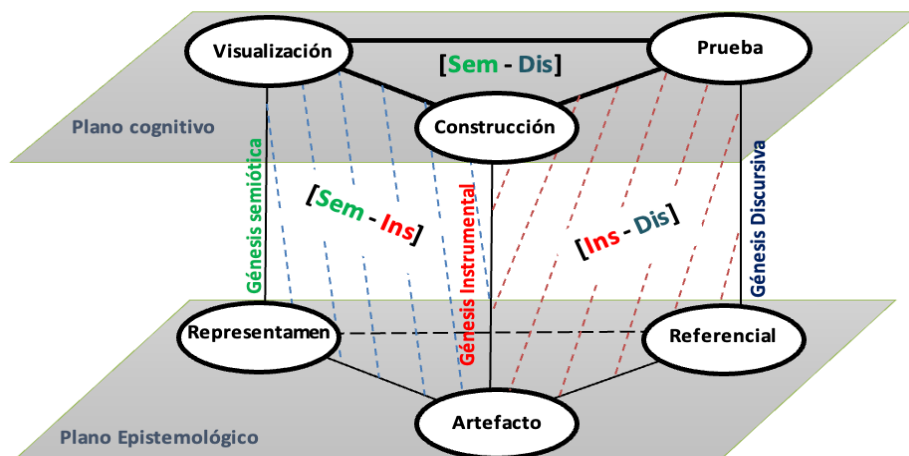
En conjunto, estas investigaciones revelan una evolución desde estudios centrados en la identificación de las dificultades asociadas a la coordinación de registros hacia propuestas que incorporan recursos tecnológicos para favorecer procesos de visualización y construcción de significados. Asimismo, evidencian que la TRRS ha proporcionado un marco sólido para comprender cómo los estudiantes interpretan, transforman y articulan diferentes representaciones durante el aprendizaje de la geometría.

Investigaciones sobre el Espacio de Trabajo Matemático en el dominio de la geometría (ETM-G)

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM), propuesto por Kuzniak (2011), es uno de los principales referentes teóricos de las investigaciones sobre la enseñanza de la geometría. Este permite analizar la actividad matemática que realizan estudiantes y profesores al resolver tareas matemáticas (en este caso nos centramos en tareas geométricas), considerando la interacción entre dos planos horizontales complementarios: un plano epistemológico, conformado por el representamen, artefactos y el referencial, y un plano cognitivo, integrado por los procesos de visualización, construcción y prueba.

La articulación de los dos planos horizontales se produce mediante tres génesis: semiótica, relacionada con la producción e interpretación de representaciones; instrumental, que transforma los artefactos en instrumentos para la actividad matemática; y discursiva, vinculada con el razonamiento y la validación matemática (Kuzniak *et al.*, 2016). Asimismo, el ETM considera tres planos verticales, definidos por la interacción entre estas génesis: semiótico-instrumental [Sem-Ins], instrumental-discursivo [Ins-Dis] y semiótico-discursivo [Sem-Dis], los cuales permiten analizar las distintas formas de trabajo matemático (Kuzniak, 2011). La Figura 2 presenta la estructura del ETM.

Figura 2 – Génesis, planos horizontales y verticales del ETM



Fuente: adaptado Kuzniak *et al.* (2016, p. 248).

Las investigaciones desarrolladas bajo este marco evidencian una evolución progresiva tanto en los objetos de estudio como en las poblaciones analizadas. Los primeros trabajos se orientaron hacia el análisis del trabajo matemático de profesores en formación mediante tareas de geometría que favorecieran la transición entre distintos paradigmas geométricos. En este contexto, Salazar y García-Cuéllar (2020) mostraron que el uso de GeoGebra favorece la coordinación entre los paradigmas de Geometría Natural (GI) y Geometría Axiomática Natural (GII), al permitir que los docentes articulen procesos de exploración, formulación de conjeturas y validación matemática durante la resolución de tareas sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Posteriormente, las investigaciones ampliaron el alcance del ETM hacia otros niveles educativos y contenidos geométricos. Pulache (2023) analiza el ETM personal de estudiantes de segundo grado de secundaria durante la resolución de tareas sobre la pirámide cuadrangular mediadas por GeoGebra. A diferencia de estudios previos centrados en objetos geométricos bidimensionales o en el trabajo matemático de docentes, esta investigación aborda un objeto tridimensional y examina las interacciones entre los componentes cognitivos y epistemológicos del ETM a partir de las génesis movilizadas por los estudiantes. Los resultados evidencian un predominio de las génesis semiótica e instrumental durante el desarrollo de las tareas, lo que permitió caracterizar la forma en que los estudiantes construyen significados, utilizan las representaciones y emplean GeoGebra como instrumento para explorar las propiedades de la pirámide cuadrangular.

En esta misma línea, Diles Gonçalves (2023) analizó el trabajo matemático promovido en estudiantes de sexto grado de primaria durante el estudio del perímetro y el área de cuadriláteros, evidenciando que la circulación entre los planos semiótico-instrumental y semiótico-discursivo resulta fundamental para superar las dificultades asociadas a la diferenciación entre ambos conceptos. Este estudio pone de manifiesto que el ETM no solo permite describir la actividad matemática de los es-

tudiantes, sino también identificar las condiciones didácticas que favorecen la construcción de significados geométricos.

Investigaciones más recientes ponen de manifiesto una consolidación del ETM como marco para comprender la interacción entre la actividad matemática y las tecnologías digitales. Urquiza Ruiz (2025), al estudiar la resolución de tareas de semejanza de triángulos mediadas por GeoGebra, evidenció que los estudiantes priorizan los paradigmas de Geometría Natural y Geometría Axiomática Natural, mientras que las herramientas digitales favorecen la validación experimental de propiedades geométricas y reducen la dependencia de procedimientos exclusivamente numéricos. Estos resultados refuerzan la idea de que los artefactos tecnológicos modifican las formas de interacción de los estudiantes con los objetos geométricos y enriquecen los procesos de exploración y demostración.

En Salazar *et al.* (2026), se analiza el trabajo matemático de profesores de matemáticas al resolver una tarea sobre el área de cuadriláteros mediada por GeoGebra. Los resultados evidencian un predominio de las génesis semiótica y discursiva, caracterizadas por procesos de visualización icónica y pruebas pragmáticas, así como la activación de los planos semiótico-discursivo y semiótico-instrumental durante la resolución de la tarea. Asimismo, el estudio muestra que la interacción con GeoGebra influye en la configuración del Espacio de Trabajo Matemático personal de los docentes, aportando evidencia sobre el papel de la tecnología en la actividad matemática del profesor.

La Tabla 2 sintetiza las principales investigaciones desarrolladas en este eje de análisis.

Tabla 2 – Investigaciones sobre el ETM en el dominio de la Geometría

Autor	Tema geométrico	Contribución principal
Salazar y García-Cuéllar (2020)	Suma de ángulos de un triángulo	Caracteriza el tránsito entre los paradigmas geométricos GI y GII en la formación docente, evidenciando el papel de GeoGebra en la construcción y validación de pruebas matemáticas.
Pulache (2023)	Pirámide cuadrangular	Analiza el Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de secundaria al resolver tareas con GeoGebra, evidenciando la activación predominante de las génesis semiótica e instrumental y ampliando el estudio del ETM hacia objetos geométricos tridimensionales.
Diles Gonçalves (2023)	Perímetro y área de cuadriláteros	Caracteriza la circulación en el ETM durante la resolución de tareas sobre perímetro y área de cuadriláteros, mostrando cómo la coordinación entre los planos del ETM contribuye a diferenciar ambos conceptos en educación primaria.
Urquiza Ruiz (2025)	Semejanza de triángulos	Evidencia cómo las tecnologías digitales favorecen la validación experimental de propiedades geométricas y la articulación entre paradigmas geométricos durante la resolución de tareas de semejanza de triángulos.
Salazar, García-Cuéllar, Henríquez-Rivas y Kuzniak (2026)	Área de cuadriláteros	Caracteriza el trabajo matemático de profesores mediante el análisis de su Espacio de Trabajo Matemático personal, identificando el predominio de las génesis semiótica y discursiva y el papel de la tecnología digital en la resolución de tareas sobre el área de cuadriláteros.

Estas investigaciones evidencian una evolución desde estudios centrados en el análisis del trabajo matemático de estudiantes hacia investigaciones que incorporan la formación docente y el papel de las tecnologías digitales como elementos constitutivos del ETM. Esta evolución refleja un desplazamiento desde el análisis de la actividad matemática individual hacia una comprensión más amplia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, integrando dimensiones epistemológicas, cognitivas y tecnológicas.

Es importante señalar que las investigaciones incluidas en este eje analizan el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) personal, ya sea de estudiantes o de docentes. En cambio, los estudios centrados en el ETM idóneo del profesor se abordan en el siguiente eje, debido a que este se orienta al estudio del conocimiento profesional del docente y de las decisiones didácticas que fundamentan la enseñanza de la geometría.

Investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor para la enseñanza de la geometría

El conocimiento profesional del profesor constituye uno de los ejes de análisis que mayor desarrollo ha experimentado en los últimos años dentro de la producción científica sobre enseñanza de la geometría. Estas investigaciones trascienden el estudio del conocimiento disciplinar del docente para analizar cómo este integra conocimientos matemáticos, didácticos y tecnológicos durante la planificación e implementación de procesos de enseñanza.

En la investigación doctoral de García-Cuéllar (2021), desarrollada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en la que se diseñó, implementó y analizó un Recorrido de Estudio e Investigación en la formación de profesores (REI-FP) sobre la enseñanza de cuadriláteros. La investigación evidencia que este dispositivo favorece procesos de reflexión sobre la práctica docente y promueve una transición desde enfoques tradicionales hacia propuestas fundamentadas en el cuestionamiento y la construcción colectiva del conocimiento, contribuyendo al desarrollo profesional de los docentes.

Otras investigaciones incorporan marcos teóricos que permiten analizar de manera más específica la naturaleza del conocimiento profesional requerido para integrar tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría. En esta línea, Théry (2023) analiza la interacción entre los conocimientos tecnológicos de los profesores y el ETM idóneo durante la planificación de la enseñanza de cuadriláteros. Sus resultados reve-

lan que los docentes reconocen el potencial de las herramientas digitales para favorecer la exploración geométrica; sin embargo, la selección de los artefactos tecnológicos y el tipo de actividades propuestas dependen del conocimiento tecnológico que poseen para enseñar dicho contenido. En consecuencia, la investigación evidencia que la integración de la tecnología no depende únicamente de la disponibilidad de recursos, sino de la manera en que estos son articulados con el conocimiento didáctico y matemático del profesor.

Sobre esta base, Salazar *et al.* (2024) profundizan en una articulación entre el modelo TPACK y el Espacio de Trabajo Matemático idóneo (ETM idóneo), mostrando que la planificación de la enseñanza de cuadriláteros requiere la interacción entre los conocimientos tecnológicos del profesor y las génesis que caracterizan el trabajo matemático. Este estudio constituye un aporte conceptual al establecer relaciones entre ambos marcos teóricos y ofrecer una perspectiva para analizar la planificación docente en contextos mediados por tecnología.

Las investigaciones más recientes amplían este campo al incorporar tecnologías emergentes en la formación inicial docente. Caypo (2025) analiza el ETM idóneo potencial de profesores en formación cuando planifican la enseñanza de cuadriláteros con apoyo de inteligencia artificial generativa. Los resultados ponen de manifiesto una predominancia de las génesis semiótica e instrumental y evidencian que herramientas como ChatGPT, Canva IA e Ideogram IA contribuyen a la elaboración de situaciones de aprendizaje, materiales y recursos visuales. No obstante, el estudio también pone de manifiesto la necesidad de fortalecer la formación docente para que la inteligencia artificial sea utilizada de manera crítica y articulada con los objetivos matemáticos y didácticos de la enseñanza.

Tabla 3 – Investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor

Autor	Tema geométrico	Contribución principal
García-Cuéllar (2021a)	Cuadriláteros	Diseña e implementa un REI-FP, favoreciendo la reflexión sobre la práctica y la enseñanza de los cuadriláteros desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico.
Théry (2023)	Cuadriláteros	Analiza la interacción entre los conocimientos tecnológicos y el ETM idóneo de profesores, evidenciando que el conocimiento tecnológico condiciona la selección de artefactos y el diseño de tareas para la enseñanza de los cuadriláteros.
Salazar, Théry y García-Cuéllar (2024)	Cuadriláteros	Establece la interrelación entre los dominios del conocimiento tecnológico del modelo TPACK y las génesis del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) idóneo para analizar la planificación de la enseñanza de los cuadriláteros.
Caypo (2025)	Cuadriláteros	Caracteriza el ETM idóneo potencial de profesores en formación al planificar la enseñanza con inteligencia artificial generativa, identificando el predominio de las génesis semiótica e instrumental y el potencial de la IA para apoyar la planificación docente.

Como se observa en la Tabla 3, los estudios desarrollados en este eje abordan principalmente la enseñanza de los cuadriláteros. Asimismo, este eje incluye investigaciones que emplean tecnologías digitales como parte de sus propuestas; sin embargo, estas se han clasificado aquí porque su foco de análisis es el conocimiento profesional del profesor, más que las tecnologías en sí mismas. Estas investigaciones evidencian una evolución en la comprensión del conocimiento profesional del profesor para enseñar geometría. Mientras los primeros estudios se orientan al diseño de dispositivos de formación docente, los trabajos posteriores desarrollan modelos analíticos que explican cómo los profesores integran conocimientos matemáticos, didácticos y tecnológicos durante la planificación de la enseñanza.

Investigaciones sobre tecnologías digitales para la enseñanza de la geometría

Las tecnologías digitales constituyen uno de los principales recursos para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, debido a su capacidad para promover procesos de visualización, exploración, construcción y validación de propiedades geométricas. Las investigaciones desarrolladas entre 2019 y 2026 muestran que estas tecnologías no solo amplían las formas de representar los objetos geométricos, sino que también median la actividad matemática de estudiantes y profesores al transformar las formas de explorar, argumentar y resolver tareas geométricas.

Un conjunto de investigaciones analiza cómo las tecnologías digitales favorecen la construcción de significados geométricos mediante la manipulación dinámica de las figuras. En esta línea, García-Cuéllar (2021b) describió una propuesta de Orquestación Instrumental para la enseñanza de la simetría axial mediada por GeoGebra. El estudio evidencia que la organización intencional del uso de esta herramienta en el aula promueve los procesos de génesis instrumental de los estudiantes, favoreciendo la exploración, la formulación de conjeturas, la validación de resultados y la construcción de esquemas de acción colectiva instrumentada.

Asimismo, García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2023) evidencian que el uso del Tangram virtual creado en GeoGebra favorece la reconfiguración de figuras y la aprehensión operativa durante el estudio del área de figuras planas. Los resultados permiten comprender que la interacción con representaciones dinámicas facilita la identificación de estrategias geométricas y promueve una comprensión más profunda de las relaciones entre las figuras y sus propiedades.

Otro grupo de investigaciones pone énfasis en el papel de las tecnologías digitales como mediadoras del razonamiento geométrico. Urquiza Ruiz (2025) muestra que GeoGebra favorece la exploración y la validación experimental de propiedades en tareas sobre semejanza de triángulos, permitiendo que los estudiantes articulen los paradigmas de Geometría Natural y Geometría Axiomática Natural durante la resolución de problemas. En este contexto, la tecnología trasciende una función representacional

para convertirse en un medio que favorece la formulación de conjeturas, la contrastación de resultados y la construcción de argumentos geométricos.

Las investigaciones también evidencian el potencial de las tecnologías digitales para comprender el trabajo matemático desarrollado por los profesores. Salazar *et al.* (2026) analizan la interacción de docentes con una aplicación de GeoGebra durante la resolución de una tarea sobre el área de cuadriláteros, identificando un predominio de la visualización icónica y de las pruebas pragmáticas, así como la activación de las génesis semiótica y discursiva en su Espacio de Trabajo Matemático personal. Además, el estudio muestra que la interacción con GeoGebra modifica la configuración del Espacio de Trabajo Matemático personal de los docentes, aportando evidencia sobre el papel de las tecnologías digitales en la actividad matemática del profesor.

Tabla 4 – Investigaciones sobre tecnologías digitales para la enseñanza de la geometría

Autor	Herramienta	Contribución principal
García-Cuéllar (2021b)	GeoGebra	Evidencia que la Orquestación Instrumental mediada por GeoGebra favorece los procesos de génesis instrumental de los estudiantes durante el aprendizaje de la simetría axial, promoviendo la exploración, la formulación de conjeturas y la construcción de significados geométricos mediante una organización intencional de la enseñanza.
García-Cuéllar y Martínez-Miraval (2023)	GeoGebra (Tangram virtual)	Evidencia que el Tangram creado en GeoGebra favorece la reconfiguración de figuras y la aprehensión operativa para la comprensión del área de figuras planas durante la formación docente.
Urquiza Ruiz (2025)	GeoGebra, Google Classroom y Zoom	Evidencia que las tecnologías digitales favorecen la validación experimental de propiedades geométricas y la articulación entre los paradigmas geométricos durante la resolución de tareas de semejanza de triángulos.
Salazar, García-Cuéllar, Henríquez-Rivas y Kuzniak (2026)	GeoGebra	Analiza el trabajo matemático de profesores mediado por GeoGebra, mostrando cómo la tecnología influye en la configuración del Espacio de Trabajo Matemático personal durante la resolución de tareas sobre el área de cuadriláteros.

Como se observa en la Tabla 4, GeoGebra es la herramienta digital más empleada en las investigaciones revisadas, tanto en estudios con estudiantes como con profesores de matemáticas. Las investigaciones analizadas destacan que las tecnologías digitales trascienden su función como recursos de apoyo para la enseñanza y se consolidan como mediadoras de la actividad matemática. Su integración favorece procesos de visualización, exploración, argumentación y validación, tanto en estudiantes como en profesores, ampliando las posibilidades para comprender y enseñar los objetos geométricos desde perspectivas dinámicas e interactivas. Asimismo, los resultados evidencian que el potencial educativo de estas herramientas depende de las tareas propuestas y de las decisiones didácticas que orientan su incorporación en el aula, más que de la tecnología en sí misma.

Perspectivas emergentes en la investigación sobre la enseñanza de la geometría

Además de los ejes consolidados identificados en la producción científica analizada, se observan investigaciones que exploran problemáticas menos desarrolladas, pero con un importante potencial para ampliar el campo de la enseñanza de la geometría. Estas investigaciones incorporan nuevas perspectivas teóricas y metodológicas que trascienden el estudio de las representaciones semióticas, el Espacio de Trabajo Matemático, el conocimiento profesional del profesor y las tecnologías digitales, abordando aspectos culturales, curriculares y epistemológicos del aprendizaje geométrico.

Una de estas perspectivas corresponde a la Etnomatemática, representada por la investigación de Cieza (2022), quien analiza las simetrías presentes en los diseños de tejidos de telar de la comunidad de Porcón, en Cajamarca - Perú. El estudio identifica y clasifica las transformaciones geométricas implícitas en las producciones artesanales y demuestra que las prácticas culturales constituyen contextos significativos para la enseñanza de la geometría. De esta manera, la investigación pone en valor el conocimiento matemático presente en las manifestaciones culturales y plantea posibilidades para diseñar propuestas didácticas que articulen la geometría escolar con la cultural peruana.

Otra perspectiva emergente se orienta al análisis del currículo como objeto de investigación en educación matemática. García-Cuéllar *et al.* (2019), desde la perspectiva ecológica de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), estudian la presencia de los cuadriláteros en el CNEB de Perú y evidencian una organización fragmentada de los contenidos geométricos. Los autores identifican el fenómeno del autismo temático, caracterizado por el tratamiento aislado de los cuadriláteros dentro de la escala de codeterminación didáctica, lo que limita las relaciones entre los distintos objetos geométricos y plantea desafíos para el diseño curricular y la formación docente.

Finalmente, la investigación de Palomino Gómez (2024) introduce una perspectiva centrada en la prueba matemática durante el aprendizaje de la geometría. A partir del estudio de tareas sobre el baricentro y el circuncentro del triángulo mediadas por GeoGebra, la autora caracteriza los tipos de prueba desarrollados por estudiantes de educación secundaria utilizando la clasificación propuesta por Balacheff. Los resultados destacan la coexistencia de pruebas pragmáticas e intelectuales durante la resolución de las tareas, aportando evidencia sobre la evolución de los procesos de argumentación matemática en entornos de geometría dinámica y abriendo nuevas posibilidades para investigar la construcción de la demostración en la educación escolar.

Tabla 5 – Investigaciones sobre perspectivas emergentes en la investigación sobre la enseñanza de la geometría

Autor	Perspectiva emergente	Contribución principal
García-Cuéllar, Almouloud y Salazar (2019)	Currículo y enseñanza de la geometría	Evidencia que el currículo peruano (CNEB) presenta una atomización de los contenidos geométricos, identificando el fenómeno del autismo temático en la enseñanza de los cuadriláteros desde la perspectiva ecológica de la TAD.
Cieza Paredes (2022)	Etnomatemática	Identifica y clasifica las simetrías presentes en los tejidos de telar de la comunidad de Porcón, mostrando el potencial del patrimonio cultural como contexto para la enseñanza de la geometría.

Palomino Gómez (2024)	Prueba matemática	Caracteriza los tipos de prueba que elaboran estudiantes de secundaria al resolver tareas sobre el baricentro y el circuncentro con GeoGebra, evidenciando la evolución desde pruebas pragmáticas hacia formas de argumentación matemática más elaboradas.
--------------------------	----------------------	--

La Tabla 5 sintetiza los trabajos que conforman este eje, los cuales ponen de manifiesto que la enseñanza de la geometría en el Perú comienza a incorporar problemáticas que amplían el campo tradicional de la investigación. El estudio de las prácticas culturales, el análisis curricular y la construcción de la prueba matemática representan perspectivas complementarias que enriquecen la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría.

CONSIDERACIONES FINALES

El análisis de las investigaciones desarrolladas principalmente en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y del Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (IREM-PUCP) evidencia una producción científica que ha contribuido al desarrollo de la investigación sobre la enseñanza de la geometría en el Perú. Durante el período analizado (2019–2026), se observa una creciente diversificación de los objetos de estudio y de marcos teóricos, lo que refleja la consolidación de una comunidad académica interesada en comprender la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría desde múltiples perspectivas.

La sistematización realizada permitió identificar cinco ejes de análisis que sintetizan las principales tendencias de esta producción científica: las representaciones semióticas, el Espacio de Trabajo Matemático en el dominio de la geometría, el conocimiento profesional del profesor, las tecnologías digitales y las perspectivas emergentes. En conjunto, estos ejes evidencian una evolución de la investigación peruana desde estudios centrados en los procesos cognitivos de los estudiantes hacia investigaciones que incorporan el trabajo matemático del profesor, la planificación de la enseñanza, el análisis curricular

y la integración de tecnologías digitales y emergentes. Asimismo, muestran la influencia de marcos teóricos propios de la Didáctica de la Matemática, como la Teoría de los Registros de Representación Semiótica, el Espacio de Trabajo Matemático y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, los cuales han proporcionado fundamentos sólidos para comprender diferentes fenómenos asociados al aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

La revisión también evidencia que las investigaciones recientes han ampliado progresivamente el campo de estudio hacia problemáticas vinculadas con la formación del profesorado y la integración de tecnologías digitales. El uso de herramientas como GeoGebra, así como el interés emergente por la inteligencia artificial generativa, pone de manifiesto que la investigación en educación matemática responde a los cambios tecnológicos y a las nuevas demandas de la enseñanza, promoviendo el diseño de propuestas didácticas que favorecen la visualización, la argumentación, la resolución de problemas y el desarrollo del pensamiento geométrico. Al mismo tiempo, la incorporación de perspectivas como la Etnomatemática, el análisis curricular y el estudio de la prueba matemática amplía las posibilidades para comprender la enseñanza de la geometría desde enfoques culturales, epistemológicos y didácticos.

No obstante, el análisis realizado permite identificar desafíos que constituyen oportunidades para el desarrollo futuro de la investigación. Entre ellos destacan la necesidad de ampliar los estudios hacia otros contenidos geométricos, incrementar las investigaciones en educación inicial y primaria, desarrollar estudios longitudinales sobre la evolución del pensamiento geométrico y fortalecer investigaciones que articulen diferentes marcos teóricos y metodológicos. Asimismo, resulta pertinente profundizar en el estudio de la demostración matemática, el razonamiento espacial, la modelación geométrica y el impacto educativo de tecnologías emergentes, como la realidad aumentada, la realidad virtual, la impresión 3D y la inteligencia artificial, desde perspectivas centradas en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Es importante señalar que el presente capítulo se centró en investigaciones desarrolladas principalmente en el ámbito de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas y del IREM-PUCP, complementadas con algunos trabajos pu-

blicados por investigadores de este grupo. En consecuencia, no pretende representar la totalidad de la producción científica peruana sobre la enseñanza de la geometría. No obstante, el corpus analizado constituye un referente significativo para comprender las principales tendencias que han orientado el desarrollo de esta área durante el período estudiado y ofrece una visión articulada de las contribuciones más relevantes realizadas desde este espacio académico.

En conjunto, este panorama permite reconocer que la investigación sobre la enseñanza de la geometría en el Perú ha alcanzado un grado importante de desarrollo y diversificación, consolidando una agenda de investigación que integra aspectos cognitivos, didácticos, tecnológicos, curriculares y culturales. Al mismo tiempo, constituye un punto de partida para impulsar nuevas investigaciones que amplíen los objetos de estudio, fortalezcan la colaboración entre instituciones y contribuyan tanto al desarrollo de la Educación Matemática como a la mejora de la enseñanza de la geometría en los distintos niveles del sistema educativo peruano.

REFERENCIAS

Álvarez, J. (2021). *Propuesta de una secuencia didáctica para el aprendizaje de las transformaciones geométricas de rotación y traslación en el plano basado en las aprehensiones en el registro figural* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/19798>

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>

Bardales, A. (2021). *Propuesta didáctica para el estudio de la homotecia con base en las aprehensiones en el registro figural con el apoyo del software GeoGebra* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/21485>

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco-Mora, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). *The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>

Caypo, J. N. (2025). *ETM idóneo potencial de profesores en formación inicial al planificar la enseñanza de cuadriláteros con apoyo de la inteligencia artificial generativa* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/32276>

Cieza Paredes, L. I. (2022). *Un estudio etnomatemático de las simetrías en los diseños de tejidos de telar de la comunidad Porcón, Cajamarca* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/24481>

Cribillero, J. (2022). *Transformaciones en las representaciones semióticas de la semejanza de triángulos en estudiantes de 4to año de secundaria mediado por GeoGebra* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/21291>

Diles Gonçalves, C. (2023). *Espacio de Trabajo Matemático: una propuesta didáctica sobre perímetro y área de cuadriláteros para sexto grado de primaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/25447>

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar*. PROEM.

García-Cuéllar, D. J. (2021a). Um percurso de estudo e pesquisa a distância em uma formação continuada de professores de matemática para o ensino de quadriláteros [Tesis doctoral, Pontificia Universidade Católica de São Paulo]. <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/23674>

García-Cuéllar, D. J. (2021b). Una orquestación instrumental de la simetría axial. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 1(2), e202102. <https://doi.org/10.54541/reviem.v1i2.11>

García-Cuéllar, D. J., Almouloud, S. A., & Salazar, J. V. F. (2019). Los cuadriláteros como saber a enseñar en el currículo peruano. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 8(17), 449-474. <https://doi.org/10.33871/22385800.2019>.

García-Cuéllar, D., & Martínez-Miraval, M. (2023). Reconfiguración de figuras para el cálculo de áreas con la herramienta polígono rígido de GeoGebra. *Revista REAMEC*, 11(1), e23111. <https://doi.org/10.26571/reamec.v11i1.16860>

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–19). <https://www.uv.es/777AQcjOjI+IQ8=/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (32), 55–70. <https://www.redalyc.org/pdf/6142/614265294004.pdf>

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematics Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education* 48, 721–737 (2016). <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>

Masgo, M. (2021). *Movilización del concepto semejanza de triángulos en estudiantes de cuarto de secundaria por medio de las representaciones semióticas* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/21174>

Ministerio de Educación. (2016). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. <https://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf>

Ministerio de Educación. (2019). *Diseño Curricular Básico Nacional de la Formación Inicial Docente. Programa de estudios de Educación Secundaria, especialidad Matemática*. Ministerio de Educación. <https://www.minedu.gob.pe/superiorpedagogica/producto/dcbn2019-matematica/>

Ministerio de Educación. (2024). *Fascículo para el desarrollo de la competencia Resuelve problemas de forma, movimiento y localización*. <https://hdl.handle.net/20.500.12799/11316>

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. NCTM.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2015). Learning geometry concepts through visualization. *Advances of Research in Mathematics Education*, 7, 31–53. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.84>

Palomino Gómez, H. L. (2024). *Tipos de prueba sobre el baricentro y circuncentro del triángulo que realizan estudiantes de 3er grado de secundaria cuando resuelven una secuencia didáctica con el uso del GeoGebra* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/30274>

Pulache, C. Y. (2023). *Espacio de Trabajo Matemático personal de estudiantes de segundo grado de secundaria en tareas sobre la pirámide cuadrangular con el uso de GeoGebra* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/26377>

Salazar, J. V. F., & Neira, V. (2019). Perspectivas actuales de la investigación en Educación Matemática en el Perú. *Educación en Revista*, 35(78), 13–26. <https://doi.org/10.1590/0104-4060.68971>

Salazar, J. V. F., & Gaita, R. C. (2015). Educación Matemática en el Perú: Avances y perspectivas. En *La Educación Matemática en el siglo XXI* (pp. 257–276). Instituto Politécnico Nacional.

Salazar, J. V. F., García-Cuéllar, D. J., Henríquez-Rivas, C., & Kuzniak, A. (2026). Teachers' mathematical work on quadrilaterals area with digital technology. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 14(3), 306–321. <https://doi.org/10.30935/scimath/18435>

Salazar, J. V., Théry, M. C., & García-Cuéllar, D. J. (2024). Conocimientos tecnológicos y el Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores en la enseñanza de cuadriláteros. En F. M. de Almeida (Org.), *Explorando o universo da matemática: teoria e aplicações* (Vol. 2, pp. 72–83). Atena Editora. <https://doi.org/10.22533/at.ed.7892411045>

Salazar, J.V.F. & García-Cuéllar, D. (2020). Paradigmas geométricos en el trabajo matemático de docentes en formación continua. *Plurais. Revista Multidisciplinar*, 5(2), 58–77. <https://doi.org/10.29378/plurais.2447-9373.2020.v5.n2.58-77>

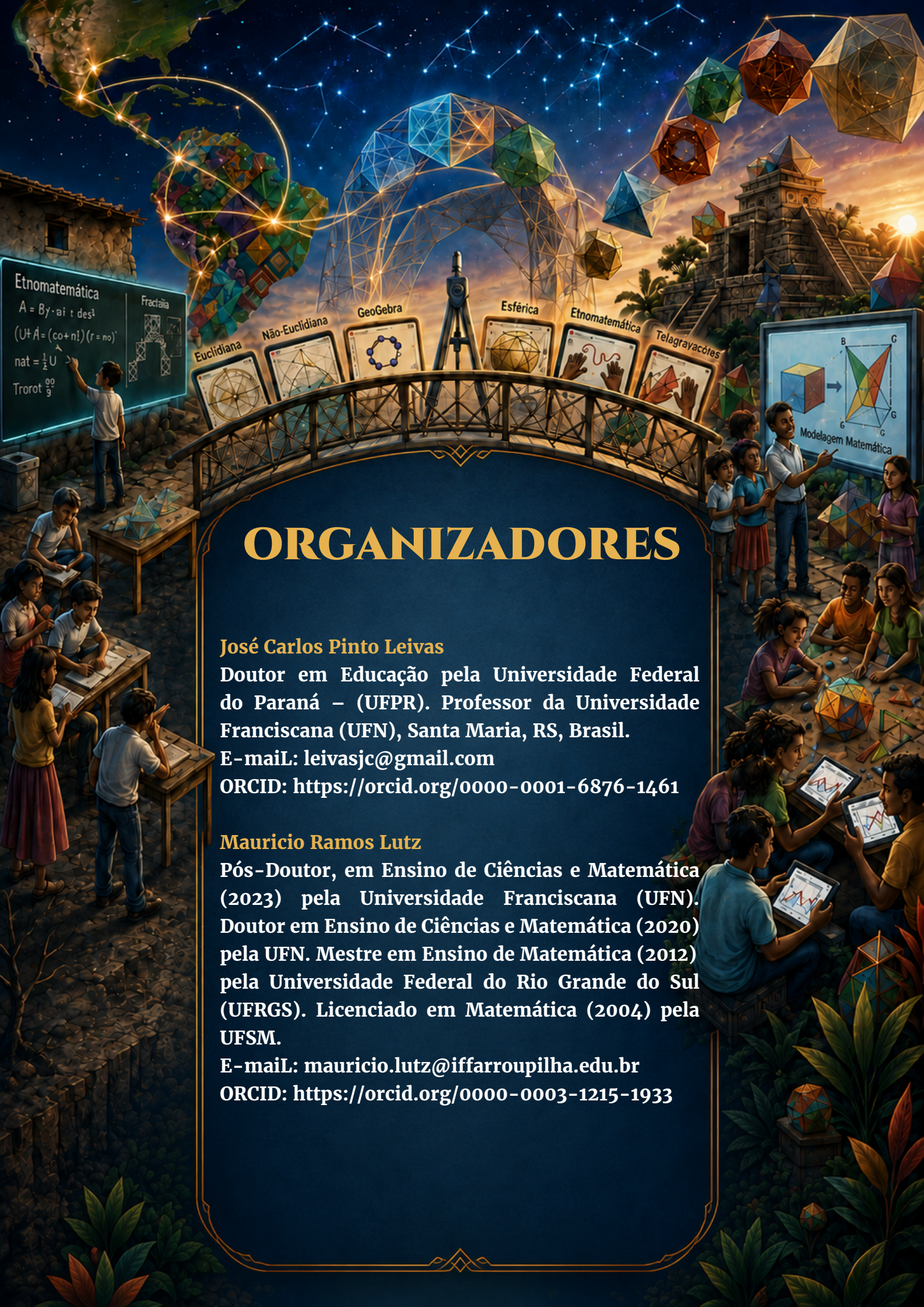
Sánchez Aguilar, M., Borba, M. de C., & Villa-Ochoa, J. A. (2025). Latin American research on mathematics education: A narrative review. *ZDM – Mathematics Education*, 57(7), 1271–1286. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01754-4>

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22. <https://www.harvardeducationalreview.org/content/57/1/1>

Théry, M. C. (2023). *Interacción de conocimientos tecnológicos con el Espacio de Trabajo Matemático idóneo de profesores sobre cuadriláteros* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/26050>

Toledo Vargas, C. V. (2024). *Reconocimiento de cuadriláteros por estudiantes de 4to grado de primaria al reconfigurar figuras geométricas* [Tesis de maestría no publicada]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/29152>

Urquiza Ruiz, M. (2025). *Trabajo matemático de estudiantes de secundaria en tareas de semejanza de triángulos mediadas por tecnología* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <http://hdl.handle.net/20.500.12404/32052>



ORGANIZADORES

José Carlos Pinto Leivas

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná – (UFPR). Professor da Universidade Franciscana (UFN), Santa Maria, RS, Brasil.

E-mail: leivasjc@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6876-1461>

Mauricio Ramos Lutz

Pós-Doutor, em Ensino de Ciências e Matemática (2023) pela Universidade Franciscana (UFN). Doutor em Ensino de Ciências e Matemática (2020) pela UFN. Mestre em Ensino de Matemática (2012) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Licenciado em Matemática (2004) pela UFSM.

E-mail: mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1215-1933>

AUTORAS E OS AUTORES

Alexandre Rodrigues de Assis

Doutor em Educação pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Professor do Instituto de Educação Rangel Pestana (IERP/SEEDUC-RJ), Nova Iguaçu, Rio de Janeiro, Brasil.

E-mail: profalexandreassis@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3658-2829>

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

Doutora em Educação pela Universidade Federal Fluminense (UFF). Professora da Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói, Rio de Janeiro, Brasil.

E-mail: anakaleff@id.uff.br

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6144-3003>

Carlos Silva Córdova

Académico titular investigador en Educación Matemática. Chile. Director Observatorio Internacional de Inteligencia Artificial en Educación Matemática OIIAEM.

E-mail: carsilcor@gmail.com

Daysi García-Cuéllar

Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professora da Pontifícia Universidad Católica del Perú (PUCP), Lima, Peru.

E-mail: garcia.daysi@pucp.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0243-6353>

Diana Carolina Pérez Duarte

Doctor en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño (UAN). Profesor – investigador de la Universidad Antonio Nariño (UAN), Bogotá, Colombia.

E-mail: dianacperez@uan.edu.co

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2168-1031>

José Carlos Pinto Leivas

Doutor em Educação pela Universidade Federal do Paraná – (UFPR). Professor da Universidade Franciscana (UFN), Santa Maria, RS, Brasil.

E-mail: leivasjc@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6876-1461>

Luis Fernando Pérez Duarte

Doctor en Educación Matemática de la Universidad Antonio Nariño (UAN).
Profesor – investigador de la Universidad Antonio Nariño (UAN), Bogotá,
Colombia.

E-mail: luisfperez@uan.edu.co

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8444-3439>

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas

Doutor em Educação especialidade em Didática de la Matemática pela
Universidade de Lisboa (UL). Professor da Universidade da Costa Rica (UCR),
San José, Costa Rica.

E-mail: luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9089-2062>

Marcelo Almeida Bairral

Doutor em Educação Matemática pela Universidade Barcelona (UB). Professor
Titular do Instituto de Educação da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
(IE/UFRRJ), Seropédica, Rio de Janeiro, Brasil.

E-mail: mbairral@ufrj.br

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5432-9261>

Mihály Martínez-Miraval

Doutor em Matemática Educativa pelo Instituto Politécnico Nacional de México
(CICATA-IPN). Professor da Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP),
Lima, Peru.

E-mail: martinez.ma@pucp.edu.pe

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7734-1223>



ARCO
EDITORES

www.arcoeditores.com
contato@arcoeditores.com
(55)99723-4952